

SCHEMI RIASSUNTIVI DELLE LEZIONI DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

(Anno Accademico 1975-76 1^a ed.)

(Anno Accademico 1991-92 2^a ed.)

1: CONCETTI STATICI E MECCANICI NEL PENSIERO SCIENTIFICO DALL'ANTICHITA' SINO A GALILEO. MACCHINE SEMPLICI. LEGGI DELLA LEVA. PROGRESSIVA SCOPERTA DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

1.1. INTRODUZIONE.

"La meccanica è una delle branche della fisica il cui bagaglio di principi è nello stesso tempo molto ristretto in volume e molto ricco di conseguenze utili. Poche scienze, d'altra parte, hanno richiesto un maggior sforzo allo spirito umano: la conquista di qualche assioma ha richiesto più di duemila anni. Nell'evoluzione della meccanica, non si può parlare né di miracolo greco, né di notte del medio evo. In verità, Archimede aveva saputo dominare la statica e credette di poterla erigere come scienza razionale, dove deduzioni rigorose matematiche giocassero già un ruolo. Ma la dinamica ellenica ci appare oggi interamente fallace. (...)

*) Pregiudizi della Scuola aristotelica, la cui autorità in altri campi era incontestabile, hanno per lungo tempo ostacolato il progresso della meccanica: commentare Aristotele era l'obiettivo essenziale

dell'insegnamento durante tutto il medio evo. Ciò non vuol dire che i pensatori scolastici abbiano mancato di originalità: essi hanno dimostrato grande vigore nel ragionamento, ma hanno trascurato spesso di interrogare l'esperienza. Solo gli astronomi facevano eccezione, accumulando le osservazioni sperimentali sulle quali la meccanica doveva più tardi fondarsi.

Il XIII secolo ebbe tuttavia in Statica una scuola originale, affermando nel caso dei corpi pesanti, sotto la denominazione di gravitas secundum situm un principio che s'evolgerà in quello dei lavori virtuali, e risolvendo, ben prima di Stevino e di Galileo, il problema dell'equilibrio di un grave su un piano inclinato che era stato affrontato da Pappo in modo errato. Nel XIV secolo, Buridano formula la prima tesi energetica sotto il nome di dottrina dell'impetus. Questa tesi si distingue esplicitamente dalle idee aristoteliche che esigevano l'intervento costante di un motore per sostenere ogni movimento "violento" nel senso di Aristotele. Ripresa in una tradizione continua che la deforma per farne una dottrina animista (...), la teoria dell'impetus sfocia finalmente, nelle mani di Benedetti, in una prima forma del principio di inerzia, mentre, considerata da un altro punto di vista, diverrà, dopo lunghe dispute, la dottrina delle forze vive. Nel XIV secolo, ancora, la Scuola di Oxford (...), espliciterà le regole della cinematica del movimento uniformemente accelerato."

[da R. Dugas: Histoire de la Mécanique, Neuchâtel 1950]

dell'insegnamento durante tutto il medio evo. Ciò non vuol dire che i pensatori scolastici abbiano mancato di originalità: essi hanno dimostrato grande rigore nel ragionamento, ma hanno trascurato spesso di interrogare l'esperienza. Solo gli astronomi facevano eccezione, accumulando le osservazioni sperimentali sulle quali la meccanica doveva più tardi fondarsi.

Il XIII secolo ebbe tuttavia in Statica una scuola originale, affermando nel caso dei corpi pesanti, sotto la denominazione di gravitas secundum situm un principio che s'evolgerà in quello dei lavori virtuali, e risolvendo, ben prima di Stevino e di Galileo, il problema dell'equilibrio di un grave su un piano inclinato che era stato affrontato da Pappo in modo errato. Nel XIV secolo, Buridano formula la prima tesi energetica sotto il nome di dottrina dell'impetus. Questa tesi si distingue esplicitamente dalle idee aristoteliche che esigevano l'intervento costante di un motore per sostenere ogni movimento "violento" nel senso di Aristotele. Ripresa in una tradizione continua che la deforma per farne una dottrina animista (...), la teoria dell'impetus sfocia finalmente, nelle mani di Benedetti, in una prima forma del principio di inerzia, mentre, considerata da un altro punto di vista, diverrà, dopo lunghe dispute, la dottrina delle forze vive. Nel XIV secolo, ancora, la Scuola di Oxford, (...), espliciterà le regole della cinematica del movimento uniformemente accelerato."

[da R. Dugas: Histoire de la Mécanique, Neuchâtel 1950]

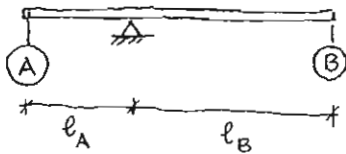
1. 2. LA MECCANICA ELLENICA

1. Aristotele (384-322 a.C.)

- Problemi meccanici (Μηχανικά προβλήματα) [probabilmente apocrifo]

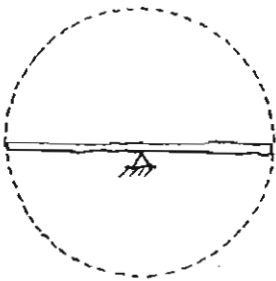
In questo trattato l'A. introduce il concetto di potenza del motore capace di spostare un corpo come "prodotto del peso o della massa del corpo - gli antichi hanno sempre confuso le due nozioni - per la velocità del moto ad esso impresso".

Questo concetto permette di formulare la condizione di equilibrio di una leva a bracci disuguali alle cui estremità sono sospesi pesi disuguali.



Infatti, quando la leva ruota, le velocità di questi pesi stanno tra loro come le lunghezze dei bracci. La leva è dunque in equilibrio se i pesi sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei bracci che li

sostengono, poiché in questo caso le due potenze antagoniste si compensano.



Nei Problemi meccanici si fa strada il tentativo di ricondurre le leggi di tutte le macchine semplici a un solo principio: "Le proprietà della bilancia sono ricondotte a quelle del cerchio, le proprietà della leva a quelle della bilancia; infine la maggior parte

dei movimenti delle macchine si riconducono alle proprietà della leva"

- Trattato sul Cielo (Περὶ οὐρανοῦ); Fisica (Φυσικὴ ἀκρόασις):

- x legge delle potenze (Libro VII, Cap. 5): "Se il motore è α , il mobile β , la lunghezza percorsa γ , il tempo impiegato δ , allora a parità di α ,

$$\alpha \text{ muoverà } \frac{1}{2} \beta \text{ per } 2 \gamma, \text{ in } \delta$$

$$\alpha \text{ muoverà } \frac{1}{2} \beta \text{ per } \gamma, \text{ in } \frac{1}{2} \delta "$$

(Cfr. anche libro III). Nell'applicazione di questo principio alla statica, troviamo qui il germe del principio dei lavori virtuali.

- x distinzione tra movimenti naturali (es. la caduta dei gravi) e movimenti violenti (es. il proiettile). La Scolastica ne trarrà il principio: "Nullum violentum potest esse perpetuum"

- x Composizioni delle velocità: "Se un mobile si muove con velocità uniforme lungo due direzioni, esso si muove seguendo la diagonale di un parallelogramma..."
- x La composizione delle forze è tratta con ragionamenti oggi superati dalla precedente.

[Tralasciamo di citare i contributi alla meccanica celeste].

2. Archimede (287 - 212 a.C.)

Mentre Aristotele iscrive la sua meccanica in una teoria fisica che tende ad abbracciare una visione globale del mondo, Archimede fa della Statica una scienza razionale autonoma, fondata su postulati d'origine sperimentale e costruita successivamente su dimostrazioni matematiche rigorose, almeno in apparenza.

Trattato sull'equilibrio dei (corpi) piani o dei loro centri di gravità.

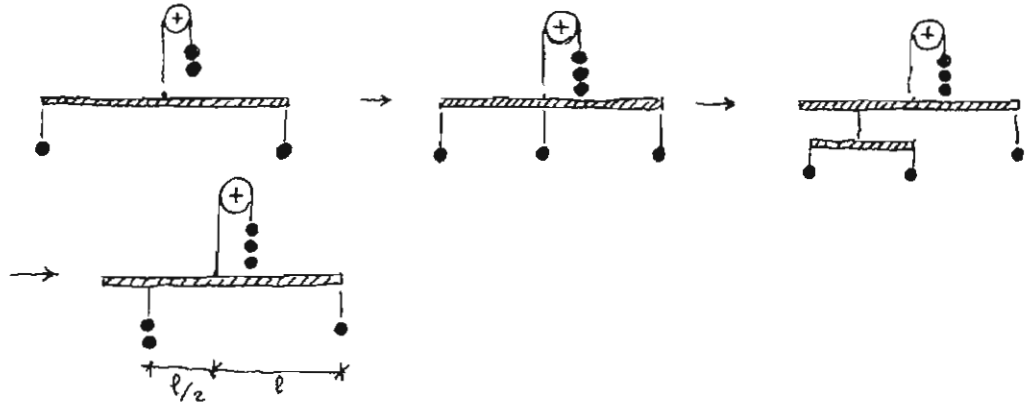
Postulati:

1. Gravi uguali sospesi a lunghezze uguali sono in equilibrio.
2. Gravi uguali sospesi a lunghezze disuguali non possono essere in equilibrio, e quello sospeso a distanza maggiore scende.
3. Dati due gravi in equilibrio, se si aggiunge qualcosa ad uno di essi, questi scende e non si ha più equilibrio.
4. Analogamente, se si toglie qualcosa ad uno dei gravi, questi sale e non si ha più equilibrio.
5. Se due figure piane sono sovrapposte l'una sull'altra, i loro centri di gravità restano sovrapposti.
6. I centri di gravità di figure simili sono disposti similmente.
7. Se certi gravi sono in equilibrio, gravi ad essi uguali e ugualmente disposti sono ancora in equilibrio.
8. Il baricentro di una figura il cui contorno è concavo è interno alla figura.

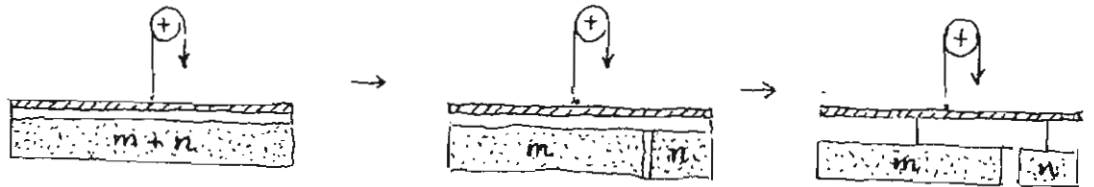
Da questi postulati Archimede trae numerosi teoremi. E' in particolare notevole il seguente in cui son contenute le leggi della leva ed è implicito il germe del concetto di equilibrio alla rotazione:

Teorema: Grandezze commensurabili sono in equilibrio se inversamente proporzionali alle lunghezze cui sono sospese.

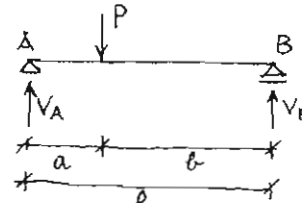
La dimostrazione è sintetizzata nella seguente catena di operazioni:



Generalizzazione (Stevin, Galileo):

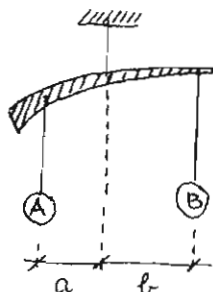


Emerge in certo modo il ruolo fondamentale del momento = forza \times braccio

[Applicazione:  Da: $A : B = b : a$ segue:
 $(A+B) : B = (a+b) : a$
 ossia: $P \cdot a - B \cdot l = 0$
 (equilibrio dei momenti)]

3. Erone di Alessandria (II sec. d.C.)

Rifacendosi al "Περί ξυγῶν" di Archimede oggi perduto, manifesta cognizione del concetto di momento.

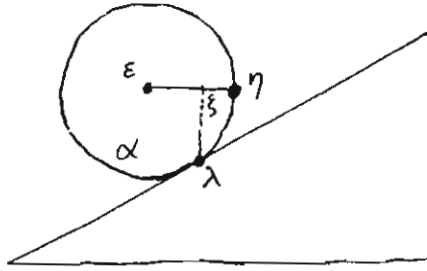


$$A : B = b : a$$

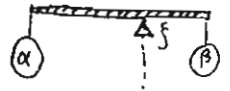
4. Pappo (IV Sec. d.C.)

Sembra che Pappo sia stato il solo geometra dell'antichità che si sia occupato del problema dell'equilibrio di un corpo su un piano inclinato.

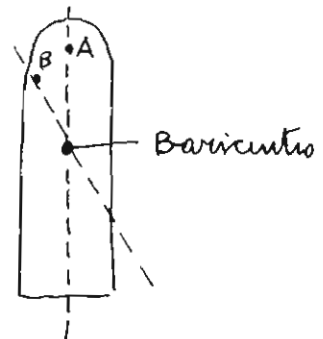
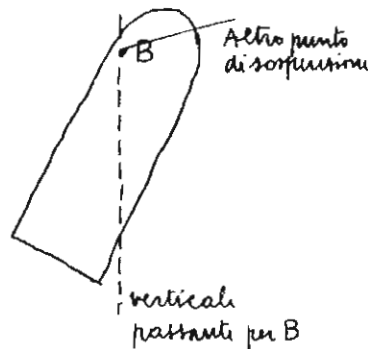
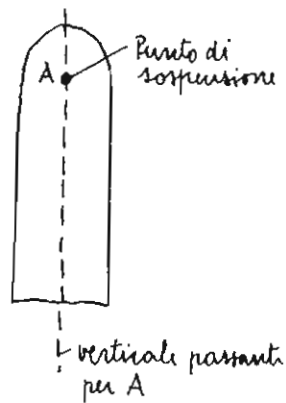
È significativo ricordare la sua trattazione, pure errata, poiché essa è un esempio della tendenza comune presso gli antichi di ricondurre ogni problema meccanico al problema della leva.



Lo studio delle condizioni di equilibrio (e cioè della "potenza", o, in termini moderni, della forza necessaria perché il peso α sia in equilibrio) è condotto (erroneamente) nell'esame della leva;



A Pappo si deve anche un metodo per la determinazione sperimentale del baricentro:



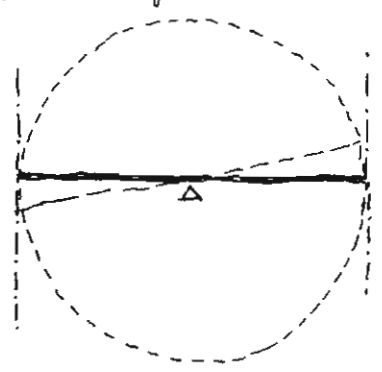
1. 3. XIII SECOLO

1. Ciordano di Nemore

Il Medio evo conosceva i Problemi meccanici e i trattati di Aristotele, ma ignorava Archimede, Erone e Sappho.

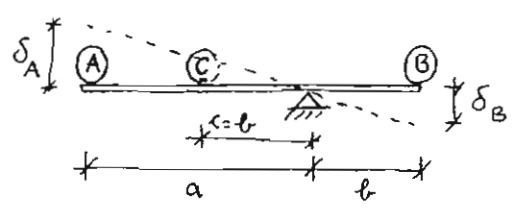
La personalità di Ciordano di Nemore è tuttora misteriosa. A partire dal XIII secolo si attribuivano a Ciordano almeno tre trattati di statica che portano invece l'impronta di autori diversi. Si ignora la patria di Ciordano e v'è incertezza sull'epoca in cui egli visse. Jaunon lo fa vivere in Germania verso il 1050, Charles lo assegna al XIII secolo, Michaud lo identifica con Raimond Jordan di Uxès (1381), Montucla ne afferma l'appartenenza al XIII secolo.

Elementa Jordani super demonstrationem ponderis. Quest'opera comprende sette assiomi o definizioni e si sviluppa in nove trattati. L'originalità essenziale di Ciordano sta nel fatto che egli considera sistematicamente, nello studio del movimento dei gravi, il tragitto effettuato secondo la verticale per misurare l'effetto di un peso disposto, generalmente, all'estremità di una leva e descrivente quindi una circonferenza. La sua statica procede così, ante litteram, dal principio dei lavori virtuali.



Tuttavia il termine "lavoro" non figura in Ciordano, il quale considera il peso relativo alla situazione del mobile (*gravitas secundum situm*) senza esplicitare d'altra parte la relazione che sussiste tra tale peso relativo e il peso propriamente detto.

È significativo menzionare una "dimostrazione" proposta da Ciordano per l'equilibrio della leva: in essa è implicito l'uso del principio dei lavori virtuali e si fa strada il tentativo di dedurre l'equilibrio da un principio "di ragione" (il princ. di ragion sufficiente): tentativo che permarrà nella meccanica sin nei tempi moderni.



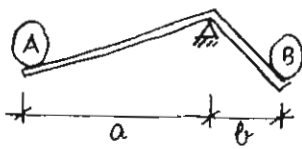
Sia $\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$; allora B non può né scendere né salire. Infatti se A salisse di δ_A e B scendesse di δ_B , ciò implicherebbe che un grave $C=B$ posto in $c=b$ si sposti di δ_B . Ma ciò è assurdo per il principio di ragion sufficiente.

2. Autore sconosciuto del "Liber Jordani de ratione ponderis"

Secondo Suhem: precursore di Leonardo.

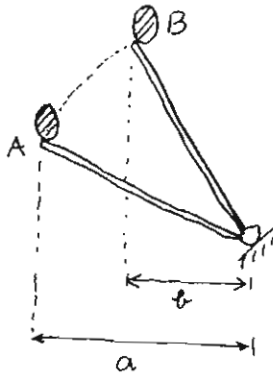
- x Dimostra di possedere la nozione corretta di momento.

Applicazione alla "bilancia piegata":



$$\frac{A}{B} = \frac{b}{a}$$

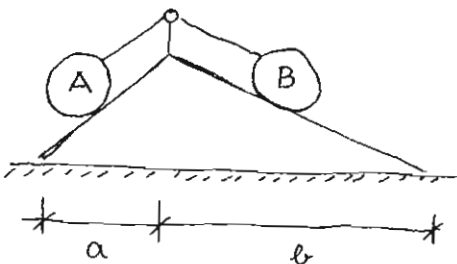
- x Tematizza la "gravitas secundum situm" fornendone una valutazione quantitativa:



$$\frac{\text{peso "relativo" in B}}{\text{peso "relativo" in A}} = \frac{a}{b}$$

- x Fornisce la soluzione del problema del corpo pesante su un piano inclinato affermando che se

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b}$$



i gravi A e B sono in equilibrio poiché posseggono "uqual virtù di caduta"

(In deduc. è tratta dal princ. dei lavori virtuali anti litteram)

1.4. XIV SECOLO

1. Giovanni Buridano, di Bethune, rettore dell'Università di Parigi nel 1327, morto a Parigi intorno al 1358.

"Quaestiones octavi libri physicorum"

- x Dottrina dell' "impeto". Secondo la scuola aristotelica era incoerente attribuire a un mobile una energia dovuta al suo stesso movimento. Secondo tale scuola, il "motore" era costituito dall'aria circostante e dal suo moto naturale: l'aria circostante comunicava il moto per contatto.
 [Questa teoria, pur errata, contiene tuttavia in germe un concetto che sarà recepito dalla meccanica moderna: il principio di azione locale].

Si era opposto alla dottrina aristotelica, nell'antichità, solo Giovanni d'Alessandria detto Filopone (VI sec. d.C.) il quale ammetteva che il moto imprimeva al mobile una "virtù". In tal modo veniva meno la distinzione tra moti naturali e moti violenti, come osservò S. Tommaso (Comm. in L. Aristotelis de Coelo et Mundo III, 7).

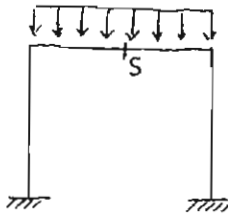
Buridano confuta la teoria di Aristotele con gli esempi della trottole (il cui moto permane senza apparenti azioni dell'aria circostante) o della nave (che prosegue il suo moto anche se il vento ha cessato di soffiare: in questo caso anzi l'aria circostante frena il moto), e formula la sua tesi così: quando il motore muove il mobile, gli imprime un certo impeto (in termini moderni si direbbe: un'energia), capace di muovere il mobile in una qualunque assegnata direzione. Questo impeto è tanto maggiore quanto maggiore è la velocità impressa e dipende dalla natura del mobile.

La meccanica moderna ha dato a questa intuizione veste matematica con la definizione di energia cinetica $= \frac{1}{2} m v^2$ (dove m è la massa del mobile e v la velocità), o con il concetto di quantità di moto ($= m v$).

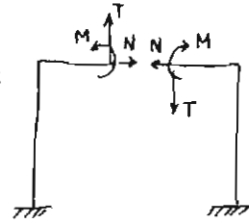
- x Buridano è spesso citato per il paradosso, a lui attribuito, dell'arino che, posto tra due fasci di fieno uguali, morirebbe di fame perché non saprebbe decidersi. Questo paradosso è in verità la banalizzazzione

di una concezione filosofica profonda, per la quale la volontà deriva le sue scelte dall'intelletto, e l'intelletto è governato, nel suo esplicarsi, dal principio di ragion sufficiente.

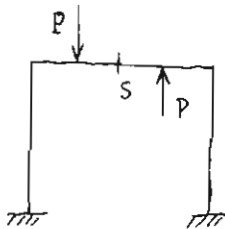
Nota: L'uso del principio di ragion sufficiente è comune nell'analisi strutturale, quando siano in gioco considerazioni di simmetria o di antisimmetria.



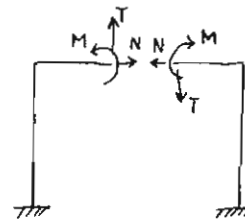
Sistema simmetrico:



Per la simmetria si può dire a priori che $T=0$ in S



Sistema antisimmetrico:



Per l'antisimmetria si può dire a priori che $M=N=0$ in S

2. Alberto di Sassonia di Helmstaedt, discepolo di Buridano, insegna alla Sorbona dal 1350 al 1361 (m. 1391)

x Tenta di precisare la relazione tra spazio, tempo e velocità, considerando, per primo tra gli antichi, il caso di velocità non uniforme. Non risolve il problema, ma è suo merito l'aver riconosciuto che lo studio del moto (la cinematica) si esaurisce nella considerazione dei tre termini: spazio, tempo, velocità.

x Si occupa del problema della caduta dei gravi. Il suo maestro Buridano era ricorso ancora, in proposito, alla dottrina del "moto naturale". Alberto invece preannuncia una dottrina della gravità, poiché approfondisce la teoria aristotelica del luogo naturale (vedi figura) interpretandola come la tendenza di un corpo a unire il suo centro di gravità col centro del mondo.

Il centro del mondo è occupato dalla terra; ma non in modo assolutamente immobile. Alberto di Sassonia contribuì a suscitare questioni e interessi che influiranno nello sviluppo della statica e della meccanica sino al XVII sec. Tracce delle sue teorie si ritrovano in Leonardo, in Cardano, in Copernico e in Galileo.

(A) fuoco

aria

acqua

terra

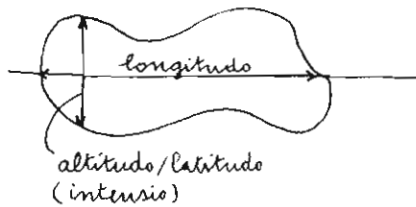
3. Nicola di Oresme (m. 1382); 1362: gran maestro del Collegio di Navarra; 1377-82: vescovo di Lisieux.

Tractatus de figuracione potentiarum et mensurarum difformitatem.

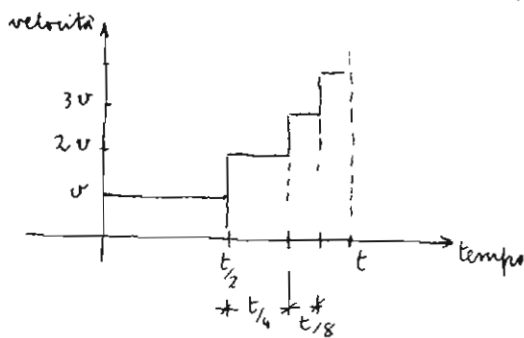
Traité du Ciel et du Monde

Secondo il Duhem, a N. di Oresme si dovrebbero far risalire tre grandi intuizioni o addirittura scoperte: la legge del moto accelerato uniformemente, l'affermazione del moto diurno della terra, l'idea della geometria analitica.

Per quest'ultima egli propone una rappresentazione grafica delle "intensità" mediante coordinate rettangolari e intrinseca la rappresentabilità di figure geometriche mediante rapporti che noi oggi esprimiamo analiticamente. (precursore di Cartesio)



Per lo studio del moto uniformemente accelerato (\rightarrow caduta dei gravi)



egli utilizza implicitamente la rappresentazione della figura e giunge alla conclusione:

$$\text{spazio} = v_{\text{media}} \cdot t$$

(precursore di Galileo)

Quanto al moto della terra, lo propone dimostrando che nessun argomento induce a preferire la tesi contraria (precursore di Copernico)

4. William Heytesbury

Merton College 1330; Oxford 1371.

Regulae solvendi sophismata; Liber calculationum.

x introduce il concetto di accelerazione

x propone corollari alla: $\text{spazio} = v_{\text{media}} \cdot t = \frac{1}{2} a t^2$

1.5. XV SECOLO

Tradizione aristotelica e idee nuove di Nicola d' Oresme, di W. Heytesbury influenzarono gli italiani: Biagio Pelicani di Parma, Gaetano di Tienne (legato alla scuola di Oxford); Bernardo Torri di Firenze, Ciriaco da Forlì.

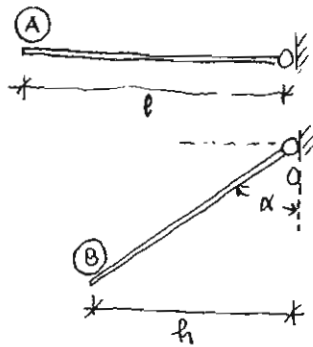
Sono ripresi le speculazioni intorno alla dottrina dell' impeto con Nicolò di Cusa (m. 1453), il quale insiste sulla natura relativa del nostro concetto di moto.

1. Leonardo da Vinci (1451-1519)

Limitiamo l' attenzione esclusivamente ai contributi che hanno attinenza con gli sviluppi della scienza delle costruzioni.

x Preciso concetto di momento. Leonardo definisce il

"braccio di leva potenziale" = h



Con ciò si fa strada il concetto di momento di B rispetto a O:

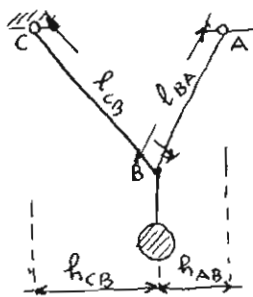
$$M = B \cdot h = B \cdot l \cdot \sin \alpha$$

x Nello studio del moto di un grave su piano inclinato, Leonardo nota, per la prima volta, che il grave divide il suo peso nelle direzioni

n, t (ma non dice come).



x Leonardo si è occupato del problema della decomposizione delle forze, ma non sembra aver raggiunto la soluzione corretta.



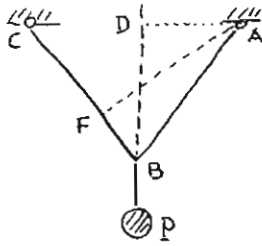
Egli afferma infatti che:

$$\frac{N_{BC}}{N_{AB}} = \frac{h_{AB}}{h_{BC}}$$

mentre in realtà è:

$$\frac{N_{BC}}{N_{AB}} = \frac{h_{AB}}{h_{BC}} \cdot \frac{P_{BC}}{P_{AB}}$$

Tuttavia, si trova spesso tra i suoi schizzi la figura:



Essa può essere interpretata come se a Leonardo apparisse plausibile la regola:

$$N_{CB} \cdot FA = P \cdot DA$$

che sarebbe corretta.

2. Cenno alle origini della meccanica celeste.

Nel 1543 usciva il De revolutionibus orbium caelestium del canonico polacco Niccolò Copernico il quale, riprendendo gli spunti di Filolao di Crotona (pitagorico), di Niceta di Siracusa, di Aristarco di Samo, e sulla scorta delle indicazioni di Guiglielmo di Occam, di Buridano, di Alberto di Sassonia, sosteneva che le apparenze dei moti del sole, dei pianeti e della luna si conciliano assai più naturalmente con l'ipotesi di un sistema eliocentrico, che non con l'ipotesi geocentrica espressa dal sistema tolemaico. Copernico si appellava soprattutto al principio di semplicità della natura, secondo il quale è da ritenersi vera la spiegazione più semplice. Copernico trasferiva il sistema di riferimento dalla terra al cielo delle stelle fisse, limite ultimo dell'universo. La dottrina di Copernico non destò subito grande rumore. Lutero la prese a dileggio. Giordano Bruno invece se ne infiammò poiché essa gli sembrava confermare la sua concezione dell'universo infinito.

Tycho-Braché (m. 1601), astronomo danese, accettò il principio copernicano, ma non tutte le conseguenze, e ammise un compromesso: un sistema misto, in cui i pianeti ruotano attorno al sole, e il sole a sua volta intorno alla terra. Ma la teoria copernicana doveva giustificare nell'opera di Keplero e di Galileo.

Keplero, culturalmente e scientificamente esponenti della meccanica scolastica, rappresentò bene la complessità dell'anima di quel tempo nel quale la scienza doveva trovare la sua strada chiarendosi dal seno della filosofia. Persuaso dell'eliocentrismo, volle calcolare matematicamente l'orbita di Marte. Si accorse che questa non poteva ritenersi, come era opinione comune, un'orbita circolare, poiché il sole, dai suoi calcoli, non poteva occuparne il centro. Per nove anni Keplero si travagliò attorno al problema, e dopo aver tentato con 19 curve, si fermò sull'ellisse. Nel 1609 annunciò all'imperatore la sua scoperta. Dopo altri nove anni, nel 1618, completò l'opera con l'enunciazione della sua 3^a legge: i quadrati dei tempi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi delle distanze.

2. FONDAZIONE DEI PRINCIPI DELLA MECCANICA STRUTTURALE NEI SECOLI XVII E XVIII.

IL PROBLEMA DI GALILEO E I SUOI SVILUPPI.

IL CONTRIBUTO DI HOOKE, DI MARIOTTE, DI PARENT.

STUDIO DELLE TRAVI DEFORMABILI ELASTICAMENTE:

BERNOULLI, EULERO. APPLICAZIONI E SVILUPPI SUCCESSIVI.

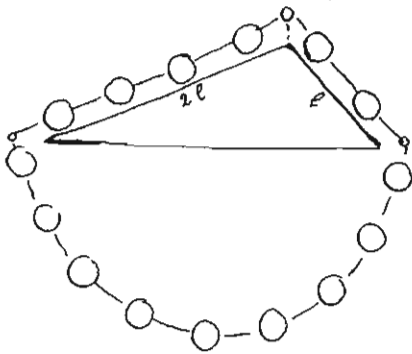
LA RESISTENZA DEI MATERIALI. COULOMB.

1. Stevino (1548-1620)

1586 : De Beghinselen der Weegconst (Static)

1608 : Hypomnemata mathematica

La statica di Stevino è presentata in stile geometrico, al modo di Archimede. Si fa strada il tentativo di dare un fondamento alla statica con pure considerazioni di equilibrio, evitando di far riferimento al concetto di velocità (virtuale). È significativa in questo senso la trattazione proposta da Stevin per il problema del piano inclinato: il problema è risolto ricorrendo al postulato dell'impossibilità del moto perpetuo.



Sempre studiando il tema del piano inclinato, Stevino perviene alla regola del parallelogramma delle forze.

A Stevino si deve un enunciato preciso del principio dei lavori virtuali:
 " Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic potentia patientis ad potentiam agentis "

2. Salomon de Caus (1576-1630), Normandia.

A Salomon de Caus si deve la nozione e il termine di lavoro nel senso della meccanica moderna.

3. Galileo Galilei (1564-1642)

1589 : insegna matematica a Pisa ; 1592 : si trasferisce a Padova ;

1609 : costruisce il cannocchiale ; 1610 : scopre i satelliti di Giove.

Passa al servizio del G. Duca di Toscana ; 1616 : è ammonito dal S. Ufficio ;

1632 : è condannato ; si ritira nella sua villa di Arcetri.

Nel campo dell' astronomia , con l' invenzione del cannocchiale Galileo scoprì le montagne della luna , le fasi di Venere , i quattro satelliti di Giove , l' anello di Saturno , risolvette la via lattea in un agglomerato di stelle , e finalmente scoprì le macchie solari , dissipando così definitivamente il pregiudizio aristotelico di una distinzione tra la fisica terrestre (della materia corruptibile) e la fisica celeste (della mat. incorruttibile).

Nel campo della fisica affermò l' isocronismo del pendolo , inventò il termometro ad aria , il compasso geometrico , l' orologio a pendolo , e soprattutto , scopre le leggi del moto e della caduta dei gravi , ponendo così le basi della dinamica . In queste leggi si contiene formulato il principio di inerzia ; si ritrova l' esatto concetto di misurazione delle forze non nella velocità , ma nell' incremento di essa o accelerazione ; si postula la proporzionalità della forza di gravità alla "quantità di materia" (massa).

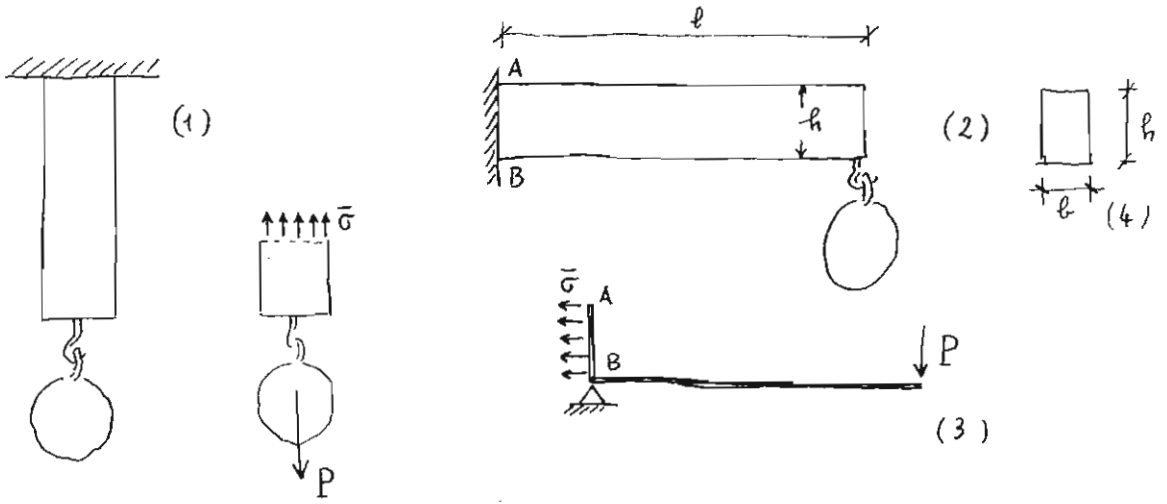
Sidereus nuncius

Dialogo sopra i massimi sistemi (composto nel ~ 1623 , stampato nel 1632)

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali (Leiden 1638)

Limitaremo l' attenzione esclusivamente sui contributi fondamentali che Galileo ha dato alla resistenza dei materiali.

4. Il problema di Galileo (Discorsi, Leiden 1638)



Nella trattazione svolta da Galileo è implicita in germe la nozione di una tensione σ $\frac{[F]}{[L^2]}$ (normale alla sezione trasversale) che misura la sollecitazione nella trave e che non può eccedere un valore limite $\bar{\sigma}$.

Per il caso (1) Galileo osserva correttamente che la "resistenza" è proporzionale all'area della sezione trasversale ed è indipendente dalla lunghezza della trave.

Il caso (2) è ricondotto da G. alla leva (3); per cui la legge della leva fornisce la relazione:

$$P \cdot l = \frac{1}{2} \bar{\sigma} b h^2 \quad (*)$$

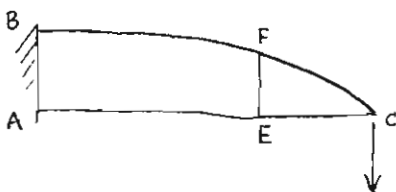
Zi qui G. trae la conclusione corretta che un prisma diritto come in (5) offre maggior resistenza dello stesso prisma diritto come in (6)



Mediante la (*) G. è in grado di risolvere il problema di "progetto ottimale" di una mensola a sezione variabile che in ogni sezione raggiunga il valore limite $\bar{\sigma}$ di σ .

Dovrà essere:

$$\frac{(EF)^2}{(AB)^2} = \frac{EC}{AC}$$

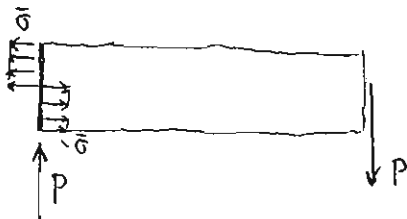


5. La soluzione di Galileo come primo abbozzo di analisi limite

La soluzione di Galileo non è corretta. Come si vedrà, non è ammissibile in generale che tutti i punti della sezione trasversale AB della trave siano soggetti alla stessa σ . Non è neppure vero che la corda inferiore B possa essere assunta come fulcro della leva ideale (3) considerata da Galileo.

Tuttavia lo spirito della soluzione ha una sua validità: se interessa conoscere il carico massimo che la struttura può sopportare, si può fare l'ipotesi schematica che, nella situazione limite, tutte le fibre abbiano raggiunto, nella sezione di incastro, la tensione massima $\bar{\sigma}$ sopportabile dal materiale. In tal modo, la moderna analisi limite delle strutture, fondata su questa ipotesi, ha ripercorso la strada di Galileo, opportunamente correggendola.

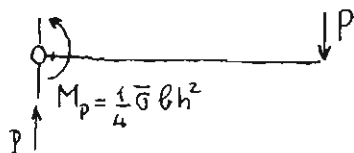
La distribuzione limite non può essere quella della figura (3) poiché ad essa corrisponderebbe una risultante orizzontale non equilibrata. Inoltre, anche da un punto di vista intuitivo, appare chiaro che non tutte le fibre sono tese, ma le fibre inferiori sono compresse. Quindi la distribuzione limite di $\bar{\sigma}$ sarà del tipo:



Da ciò segue:

$$P \cdot l = \frac{1}{4} \bar{\sigma} b h^2 \quad (0)$$

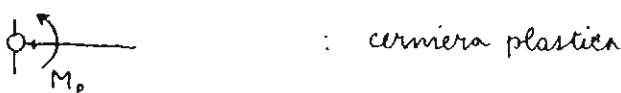
Se il carico P viene aumentato oltre il valore limite (0), la sezione di incastro non è in grado di esprimere un corrispondente aumento di resistenza; pertanto si innescia un cinematisimo di collasso, come se la sezione stessa fosse una cerniera:



Nella terminologia moderna si definisce:

$$M_p = \frac{1}{4} \bar{\sigma} b h^2 \quad : \quad \text{momento di completa plasticizzazione}$$

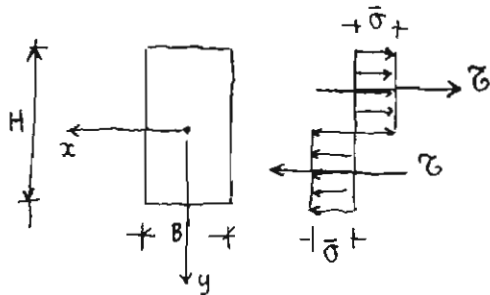
$$P_c = \frac{1}{4} \bar{\sigma} \frac{b h^2}{l} = \frac{M_p}{l} \quad : \quad \text{carico di collasso}$$



6. Applicazioni e sviluppi recenti.

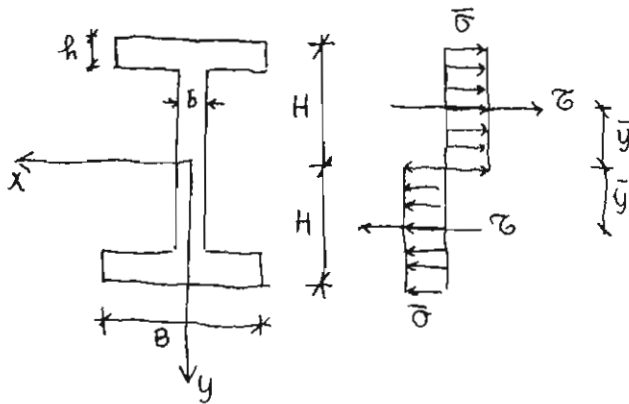
1) Il momento di completa plasticizzazione M_p dipende da $\bar{\sigma}$ e dalla sezione.

Vediamo alcuni esempi:



$$\bar{\tau} = \bar{\sigma} \frac{BH}{2}$$

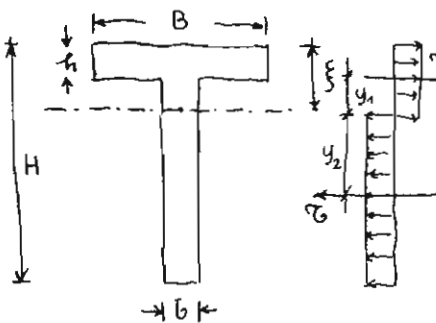
$$M_p = \bar{\sigma} \frac{BH}{2} \cdot \frac{H}{2} = \bar{\sigma} \frac{BH^2}{4}$$



$$\bar{\tau} = \bar{\sigma} (Bh + b(H-h))$$

$$\bar{y} = \frac{Bh(H - \frac{h}{2}) + \frac{1}{2}b(H-h)^2}{Bh + b(H-h)}$$

$$M_p = 2 \bar{\tau} \bar{y}$$



Occorre determinare ξ in modo che la retta - - - - - divida la sezione in aree uguali (infatti l'equilibrio alla trazione orizzontale impone che la risultante orizzontale delle tensioni sia nulla).

Pertanto:

$$b(H - \xi) = b(\xi - h) + Bh \rightarrow \xi = \frac{1}{2b} [b(H-h) - Bh]$$

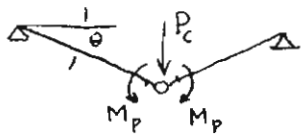
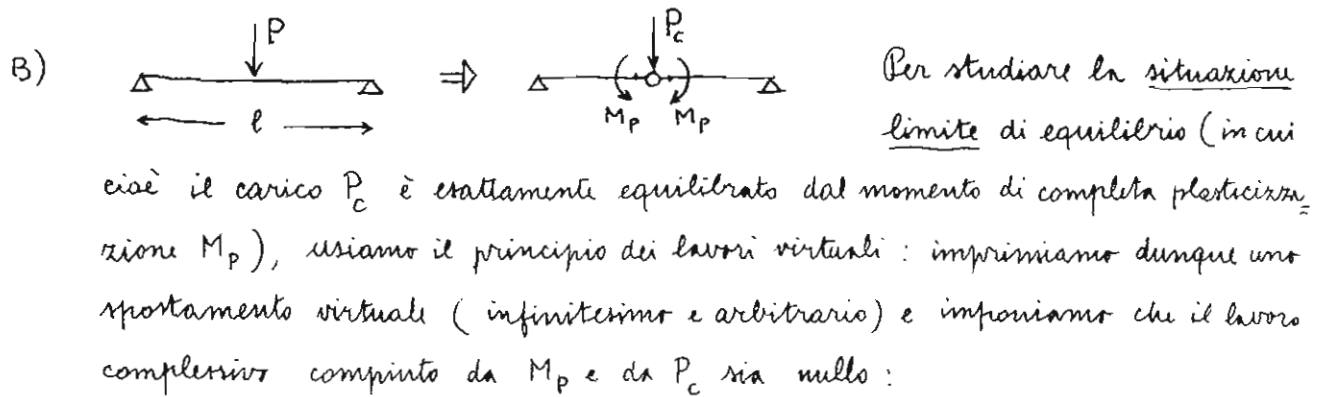
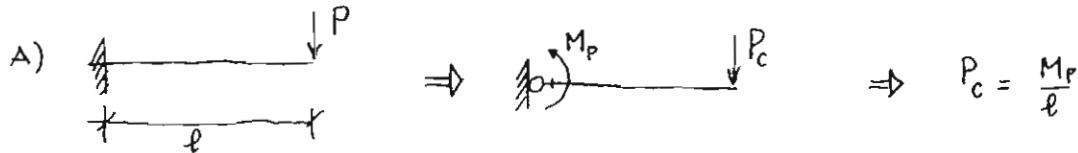
$$y_1 = \frac{Bh(\xi - \frac{h}{2}) + \frac{1}{2}b(\xi - h)^2}{Bh + b(\xi - h)}$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(H - \xi)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\sigma} b(H - \xi)$$

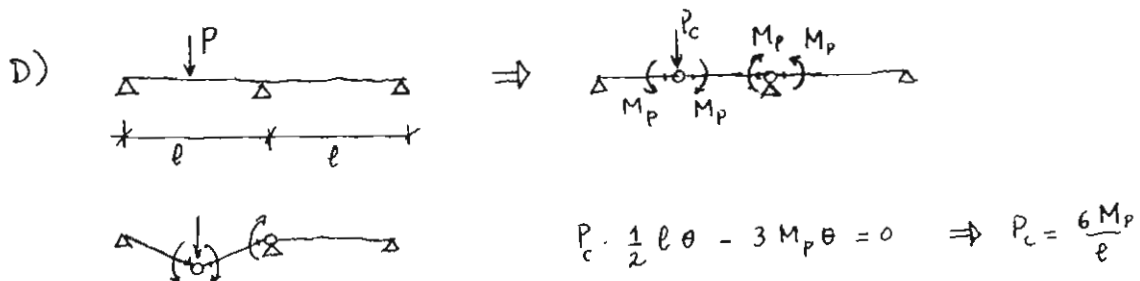
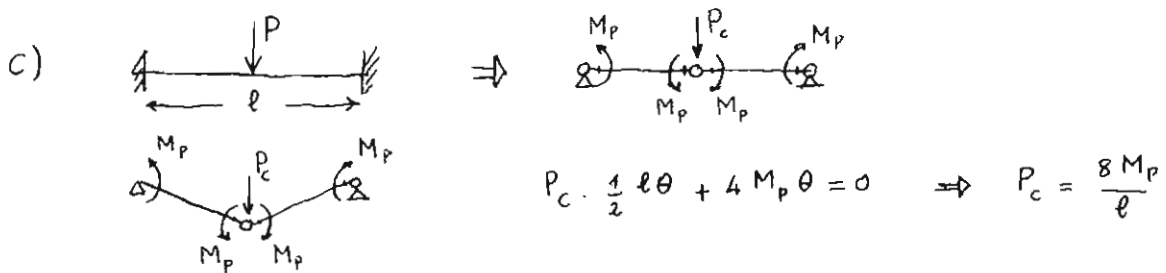
$$M_p = \bar{\tau} (y_1 + y_2)$$

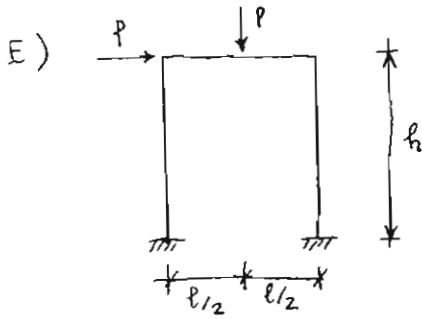
2) Sulla base delle cognizioni sinora acquisite, e cioè utilizzando il principio dei lavori virtuali (Cfr. Stevino) e il concetto di M_p , siamo già in grado di calcolare il carico di collasso di alcune strutture, nell'ipotesi che sino al verificarsi del collasso esse possano essere considerate rigide.



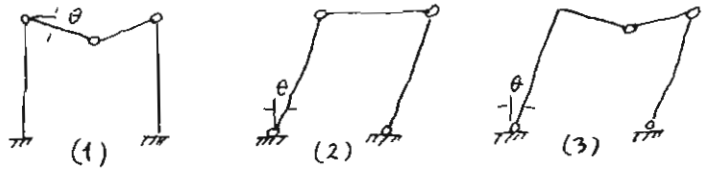
$$P_c \cdot \frac{1}{2} l \theta + 2 M_p \theta = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} P_c l + 2 M_p \right) \theta = 0$$

$$\Rightarrow P_c = \frac{4 M_p}{l}$$





Sono plausibili tre meccanismi di collasso:



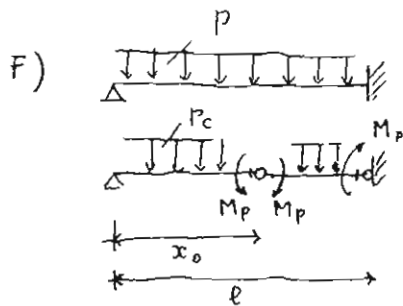
Nel caso (1) si ha : $P_c \frac{l}{2} \theta - 4 M_p \theta = 0 \Rightarrow P_c = \frac{8 M_p}{l}$

Nel caso (2) si ha : $P_c h \theta - 4 M_p \theta = 0 \Rightarrow P_c = \frac{4 M_p}{h}$

Nel caso (3) si ha : $P_c (h + \frac{l}{2}) - 6 M_p \theta = 0 \Rightarrow P_c = \frac{6 M_p}{h + \frac{l}{2}}$

Un teorema afferma che il carico di collasso è il minimo dei carichi corrispondenti ai diversi cinematismi ammissibili.

Pertanto nell'attuale esempio si darà una caratteristica al variare del rapporto h/l .



In questo caso non è prevedibile a priori la posizione della cerniera plastica.

Supponiamo che essa si formi in x_0 . L'equazione di lavori virtuali dà:

$$M_p \theta (1 + \frac{l}{x_0}) = [P_c x_0 + p_c (l - x_0)] \theta \frac{l - x_0}{2}$$

Da cui : $P_c = \frac{2 M_p}{l x_0} \frac{l + x_0}{l - x_0}$

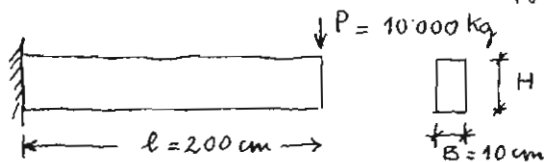
Imponendo la condizione di minimo a P_c si ottiene:

$$\frac{dP_c}{dx_0} = 0 \rightarrow x_0 = (\sqrt{2} - 1) l \quad \text{e quindi} \quad P_c = 11,657 \frac{M_p}{l^2}$$

3) Dimensionamento di una struttura con riguardo al carico di collasso.

Esempio: determinare l'altezza H della sezione trasversale della trave in fig.

in modo che il coefficiente di sicurezza al collasso sia $\eta = 1,5$.



$$\bar{\sigma} = 2400 \text{ Kg/cm}^2$$

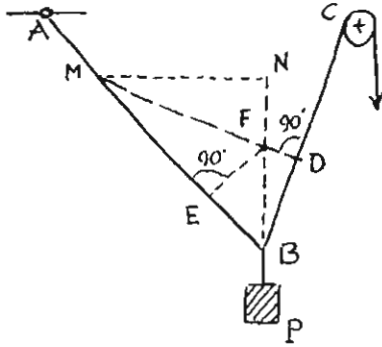
$$P_c = P \cdot \eta = 10'000 \cdot 1,5 = 15'000 \text{ Kg}$$

$$M_p = P_c l = 3'000'000 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_p = \bar{\sigma} \frac{B H^2}{4} \Rightarrow H = \sqrt{\frac{4 M_p}{B \bar{\sigma}}} = 22,4 \text{ cm}$$

7. Roberval (1602-1675)

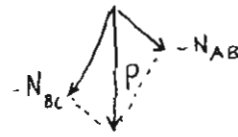
Richiamandosi alla legge della leva o del piano inclinato dà la prima trattazione sistematica del parallelogramma delle forze.



Prendendo M comunque su AB si ha:

$$N_{CB} : P = MN : MD$$

Ciò corrisponde alla regola:

8. Varignon (1654-1722) Nouvelle mécanique.

Varignon è uno degli ultimi esponenti della scuola aristotelica. Ciò non gli ha impedito di dare contributi fondamentali alla statica.

Anche egli si è occupato del parallelogramma delle forze e delle velocità.

Assai noto è il suo

Teorema: La somma dei momenti di due forze rispetto a un punto qualsiasi è uguale al momento della risultante rispetto allo stesso punto.

Con Varignon la statica prende la sua forma modernamente più requita. Ciò egli la organizza fondandola sulle equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \text{risultante di tutte le forze} = 0 \\ \text{momento risultante di tutte le forze rispetto a un punto qualunque} = 0 \end{cases}$$

Il principio dei lavori virtuali ne diventa allora un corollario.

9. Robert Hooke (1635-1703)

Nasce nell' isola di Wight; studia a Westminster latino, greco, Ebraico, Geometria.

1653: nella Christ Church a Oxford; 1662: Master of Arts; curatore degli

esperimenti della Royal Society, introdotto da Boyle. 1664: professore di

Geometria al Gresham College. Nel 1666 il grande incendio di Londra

distrugge gran parte della città; Hooke diventa controllore della ricostruzione,

progettista, urbanista (insieme ad altri scienziati e architetti del tempo, come

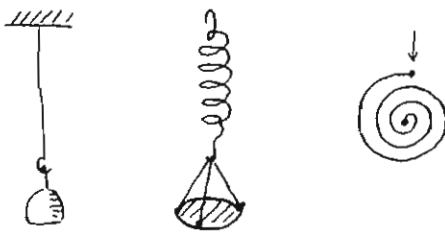
Wren). Nel 1668 partecipa, con Wallis e Wren, al concorso sulle

leggi dell' urto, proposto dalla Royal Society, stabilendo le leggi dell' urto

elastico e pervenendo a una prima formulazione del teorema delle forze vive.

1678: "De potentia restitutiva"

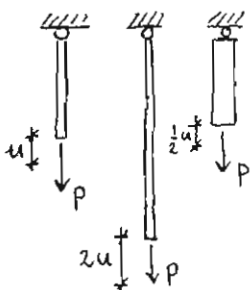
In seguito a numerose esperienze sulle molle (per orologi) perviene a stabilire la relazione tra l'intensità della forza applicata e il conseguente allungamento.



Per i materiali da H. sperimentati tale relazione è lineare: cioè la forza è proporzionale all'"estensione" (allungamento).

"Ut (ex) tensio sic vis"

L'importanza del contributo di Hooke risiede anche nella proposta metodologica che egli trae dalla sua legge. Hooke afferma infatti che in virtù della relazione tra forze e spostamenti, lo studio delle sollecitazioni può essere ricondotto all'analisi della deformazione. Questa osservazione è molto importante. Come si vedrà in seguito, ad esempio nello studio delle strutture iperstatiche, le considerazioni attinenti alla geometria della deformazione (ossia alla congruenza) sono fondamentali per la determinazione delle sollecitazioni.



Tuttavia la legge di Hooke esige un ulteriore approfondimento.

Il legame forza/spostamento non è del tutto espressivo del materiale ma dipende dalle dimensioni del provino e cioè dalla sua lunghezza l e dalla sua sezione trasversale A . Per trarre una relazione dipendente soltanto dalla

23

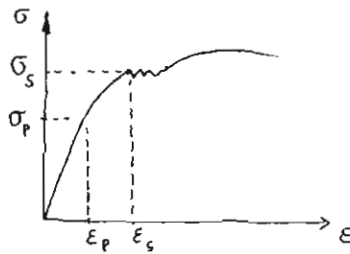
natura del materiale occorre riferirsi non alla forza P ma alla tensione $\sigma = \frac{P}{A}$, e non allo spostamento (o allungamento) u ma alla dilatazione unitaria (o deformazione) $\epsilon = \frac{u}{l}$.

Rispetto a σ e a ϵ , la legge di Hooke prende la forma:

$$\sigma = E \epsilon$$

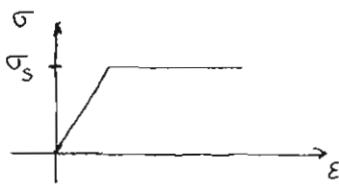
dove la costante di proporzionalità E è stata determinata sperimentalmente per alcuni materiali da Young (1773-1829) e prende il nome di modulo di elasticità di Young.

In effetti la legge di Hooke vale soltanto, in via approssimata, per piccoli valori di ϵ . Il diagramma completo (σ, ϵ) è del tipo:



Sino a ϵ_p, σ_p il diagramma è lineare (si parla di limiti di proporzionalità); successivamente, sino a σ_s , il materiale si mantiene ancora elastico (rimuovendo il carico cessa la deformazione) ma la relazione σ, ϵ non è più lineare. σ_s viene indicata come tensione di snervamento. Oltre ancora si entra nella fase plastica sino al raggiungimento della rottura.

Sono usuali le schematizzazioni:



elasto-plasticità perfetta



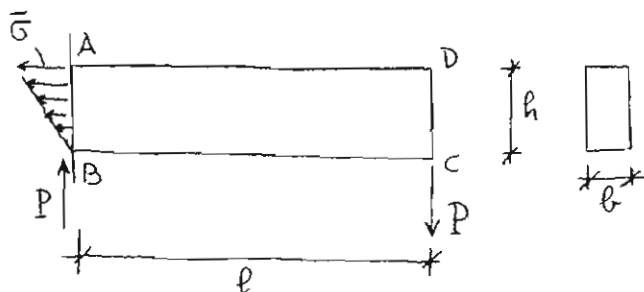
elasto-plasticità con incrudimento.

10. La legge di Hooke e il problema di Galileo.

La scoperta della proporzionalità tra deformazione e tensione ha aperto ad una nuova impostazione del problema di Galileo: una impostazione il cui significato metodologico è fondamentale per gli sviluppi della Scienza delle Costruzioni.

Mariotte (1620-1684). Priore a St. Martin sous Beaune a Digione.

Per la teoria dell'elasticità che qui interessa, è fondamentale un suo lavoro sul moto dei fluidi uscito postumo.



Muovendosi dall'ipotesi che le fibre all'intradosso (BC) non subiscano né allungamenti, né accorciamenti, e che le fibre superiori si allungino in misura

proporzionale alla distanza dall'intradosso, Mariotte perviene alla distribuzione triangolare di σ della figura. Da essa segue:

$$P \cdot l = M = \frac{\bar{\sigma} b h}{2} \frac{2}{3} h = \frac{\bar{\sigma} b h^2}{3}$$

La formula:

$$M = \frac{\bar{\sigma} b h^2}{3} \quad (0)$$

non è corretta, poiché non è vero che le fibre BC non subiscano né allungamenti né accorciamenti; inoltre, la distribuzione di tensioni rappresentata in figura non è equilibrata. Tuttavia la trattazione di Mariotte è stata per lungo tempo seguita, e considerata un miglioramento della formula di Galileo.

[In effetti la (0) approssima la formula corretta relativa alla situazione di collasso:

$$M_p = \bar{\sigma} \frac{b h^2}{4}$$

meglio della formula di Galileo.

Si deve osservare però che la relazione fra M e $\bar{\sigma}$ nella teoria di Mariotte non si riferisce alla situaz. di collasso, bensì a generali condizioni di esercizio in cui il materiale si mantiene in ogni sua parte elastico.]

Al problema di Galileo posero mano, sulla pista segnata da Mariotte, G. Bernoulli (del quale parleremo in seguito), Leibniz, Varignon, senza pervenire però a risultati pienamente soddisfacenti. Si deve a Barent la soluzione corretta in un caso particolare.

Barent (1666 - 1716). Nato a Parigi, studia legge e matematica.

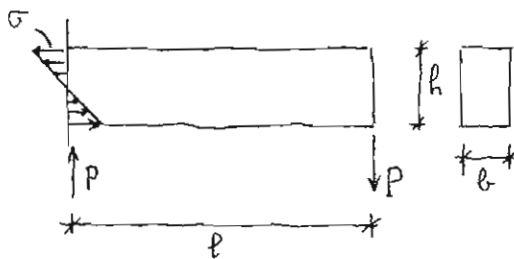
1699: Assistente di Des Billettes nell'Accademia di Francia.

1713: Si alle stampe "Recherches de Mathématique et de Physique"



Egli osserva che alla distribuzione triangolare di Mariotte dovrebbe corrispondere in B una reazione concentrata R di verso contrario: è

però ragionevole ritenere che solo il lato inferiore della base di incastro sopporti la reazione "di compressione" R. Senza ulteriori giustificazioni, dunque,



Barent ammette una distribuzione lineare della tensione σ su due triangoli uguali (vedi fig.).

Da essa segue:

$$Pl = \bar{\sigma} \cdot \frac{1}{2} b \cdot \frac{1}{2} h \cdot \frac{2}{3} h$$

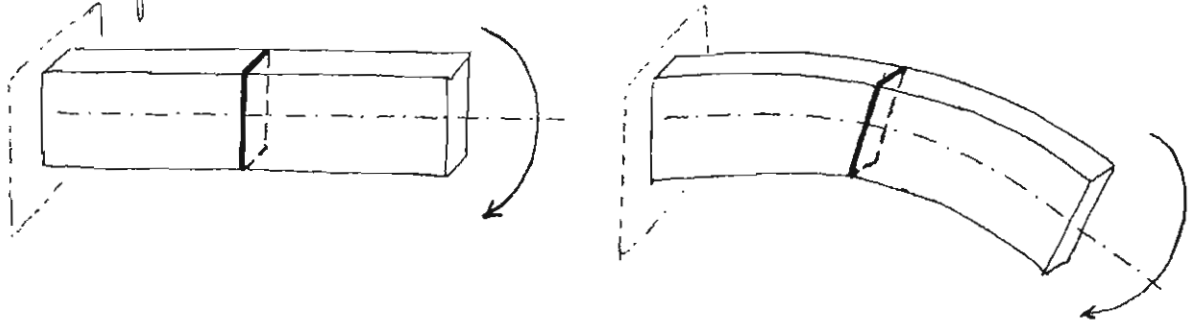
Ossia:
$$M = \frac{1}{6} \bar{\sigma} b h^2$$

Questa formula è corretta in campo elastico.

In verità il merito di aver chiarito il nesso tra la distribuzione lineare delle tensioni proposta da Barent e la deformazione della trave che ad essa corrisponde spetta a C.A. Coulomb (1736-1806): in un suo fondamentale lavoro del 1773, egli osserva che la distribuzione delle tensioni non è univocamente determinata dalle condizioni di equilibrio, ma dipende essenzialmente dalle modalità di deformazione che si ipotizzano per la trave.

Finalmente, L. Navier (1785-1836) chiarisce il significato del risultato ottenuto da Barent, formulando esplicitamente l'ipotesi fondamentale che già Mariotte, Bernoulli e Barent avevano utilizzato: l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane.

Ipotesi di conservazione delle sezioni piane: durante la flessione, una sezione piana normale all'asse della trave si mantiene piana (e normale all'asse deformato).

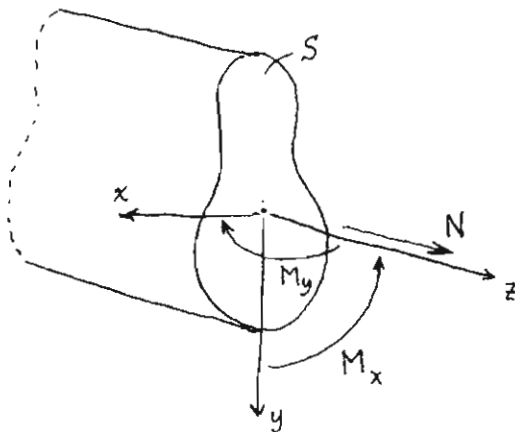


11. Sviluppo e generalizzazione dei risultati precedenti (Secolo XIX)

1. La formula:

$$M = \frac{1}{6} \bar{\sigma} B h^2,$$

ottenuta sinora in un caso particolare, può essere generalizzata. Ci proponiamo dunque di stabilire la relazione tra le caratteristiche di sollecitazione che operano su una certa sezione di una trave e la tensione $\bar{\sigma}$ che si è introdotta con il problema di Galileo.

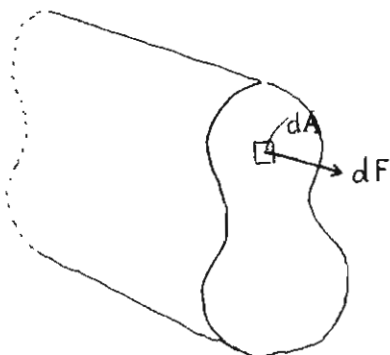


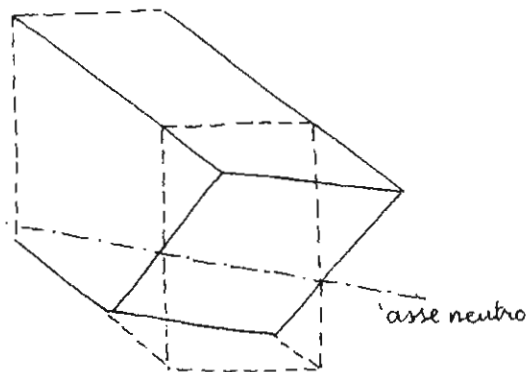
Supponiamo che su una sezione S operino la forza normale N e il momento flettente M le cui componenti sugli assi x e y sono M_x, M_y .

In effetti, ciò vuol dire che su ogni elemento dA della sezione S opera una forza elementare dF . Si può allora definire la tensione $\bar{\sigma}$ come:

$$\bar{\sigma} = \frac{dF}{dA}$$

(Supponiamo che dF sia perpendicolare a dA). $\bar{\sigma}$ rappresenta dunque una forza agente per unità di superficie, ed è assunta positiva se di trazione.





Se vale l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, ogni fibra longitudinale della trave si allungherà o si accorcerà in modo che i punti della sezione S si portino, durante la deformazione, su un piano.

Quindi si avrà, genericamente,

$$\varepsilon = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

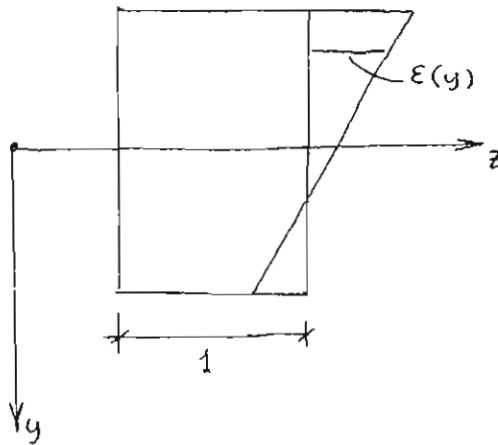
($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, costanti)

Dalla legge di Hooke segue allora:

$$\sigma = E \varepsilon = a_0 + a_1 x + a_2 y \quad (o)$$

($a_0 = E \alpha_0$, ecc.)

Dati N, M_x, M_y è facile determinare a_0, a_1, a_2 .



Infatti deve aversi:

$$\int_A \sigma dA = N \quad ; \quad \int_A \sigma y dA = M_x \quad ; \quad \int_A \sigma x dA = -M_y$$

Per la (o) si ha dunque:

$$\begin{aligned} a_0 A + a_1 \int_A x dA + a_2 \int_A y dA &= N \\ a_0 \int_A y dA + a_1 \int_A xy dA + a_2 \int_A y^2 dA &= M_x \\ a_0 \int_A x dA + a_1 \int_A x^2 dA + a_2 \int_A yx dA &= -M_y \end{aligned} \quad (x)$$

A questo punto, scegliamo gli assi x, y in modo che essi siano:
baricentrici
principali di inerzia.

Ne segue:

$$\int_A y dA = 0 \quad \int_A x dA = 0 \quad \int_A xy dA = 0$$

Le quantità $\int_A y^2 dA$, $\int_A x^2 dA$ rappresentano, come è noto, i momenti

principali di inerzia rispetto a x e a y . Si indicano così:

$$J_x = \int_A y^2 dA \quad J_y = \int_A x^2 dA$$

Le (x) forniscono allora:

$$a_0 = \frac{N}{A} \quad ; \quad a_1 = -\frac{M_y}{J_y} \quad ; \quad a_2 = \frac{M_x}{J_x}$$

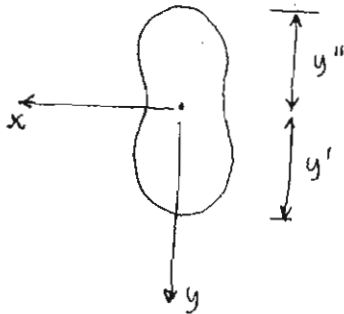
In conclusione:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

Casi particolari:

1) se M_x, M_y sono nulli $\rightarrow \sigma = \frac{N}{A}$ (cfr. Galileo)

2) se $M_y = 0$ e $N = 0$ $\rightarrow \sigma = \frac{M_x}{J_x} y$



Il valore massimo di $|\sigma|$ si verifica per $y = y'$ e/o per $y = y''$.

Definendo le quantità:

$$W_x' = \frac{J_x}{y'} \quad W_x'' = \frac{J_x}{y''}$$

(denominati moduli di resistenza)

si avrà, rispettivamente:

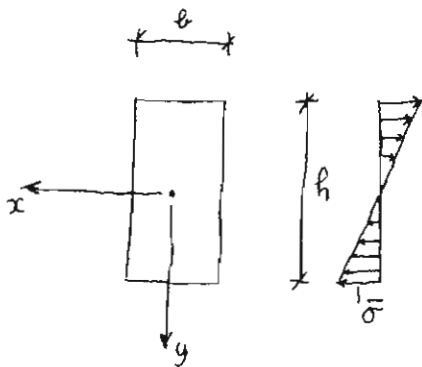
$$\sigma(y') = \frac{M_x}{W_x'} \quad \sigma(y'') = \frac{M_x}{W_x''}$$

Per una sezione rettangolare:

$$J_x = \frac{1}{12} b h^3 \quad y' = -y'' = \frac{h}{2}$$

$$\bar{\sigma} = \frac{M_x}{\frac{1}{12} b h^3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{M_x}{\frac{1}{6} b h^2}$$

$$M_x = \frac{1}{6} \bar{\sigma} b h^2 \quad (\text{cfr. Parent})$$



2) Osservazioni.

Asse neutro: dalla

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$

deriva che il luogo dei punti in cui $\sigma = 0$ è una retta nel piano (x, y) : tale retta prende il nome di asse neutro.

La sua equazione è dunque:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x = 0$$

ossia:

$$\frac{M_x}{N} \cdot \frac{A}{J_x} y - \frac{M_y}{N} \frac{A}{J_y} x + 1 = 0 \quad (\$)$$

Ricordando che è $\rho_y^2 = \frac{J_x}{A}$, $\rho_x^2 = \frac{J_y}{A}$ (raggi principali di inerzia), e definendo il centro di sollecitazione $C \equiv (x_c, y_c)$, con $x_c = -\frac{M_y}{N}$, $y_c = \frac{M_x}{N}$, la (§) prende la forma:

$$\frac{x_c x}{\rho_x^2} + \frac{y_c y}{\rho_y^2} + 1 = 0$$

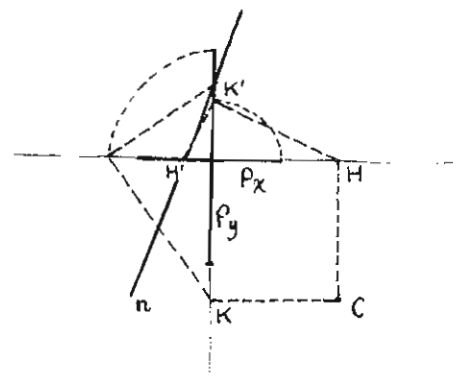
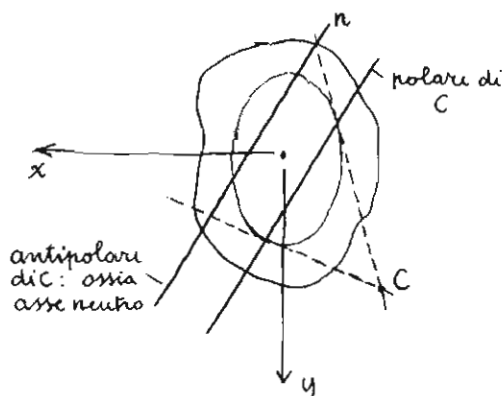
Questo modo di scrivere l'equazione dell'asse neutro è molto espressivo, poiché mostra che il centro di sollecitazione C e l'asse neutro si corrispondono come polo e polare rispetto all'ellisse immaginaria:

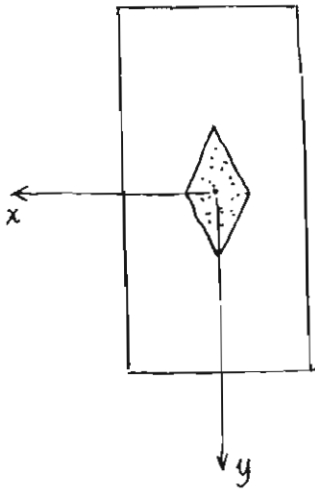
$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = -1$$

Ciò vuol dire in altri termini che C è l'antipolo dell'asse neutro rispetto all'ellisse centrale di inerzia:

$$\frac{x^2}{\rho_x^2} + \frac{y^2}{\rho_y^2} = 1$$

Qui, numerose tecniche per determinare l'asse neutro, dato il centro di sollecitazione (e cioè dati N, M_x, M_y).





L'asse neutro risulta tangente al contorno della sezione, se il centro di sollecitazione descrive il contorno del nocciolo.

La tensione σ non muta segno nella sezione se il centro di sollecitazione è interno al nocciolo. Il concetto di nocciolo, fondamentale per talune applicazioni tecniche, fu introdotto da Jacques A. C. Bresse (1822-1883).

3) Applicazione.

Proponiamoci il problema di dimensionare una trave presso o tenso inflessa, utilizzando la:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x$$



In questo caso è $N = M_y = 0$

Si ha dunque:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Interessa verificare che:

$$\max |\sigma| \leq \sigma_{am}$$

dove:

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{\text{coeff. di sicurezza}}; \text{ ad es., per l'acciaio tipo I: } \sigma_{am} = 1600 \text{ Kg/cm}^2$$

Essendo $W_x = \frac{J_x}{H/2}$ si dovrà ottenere che:

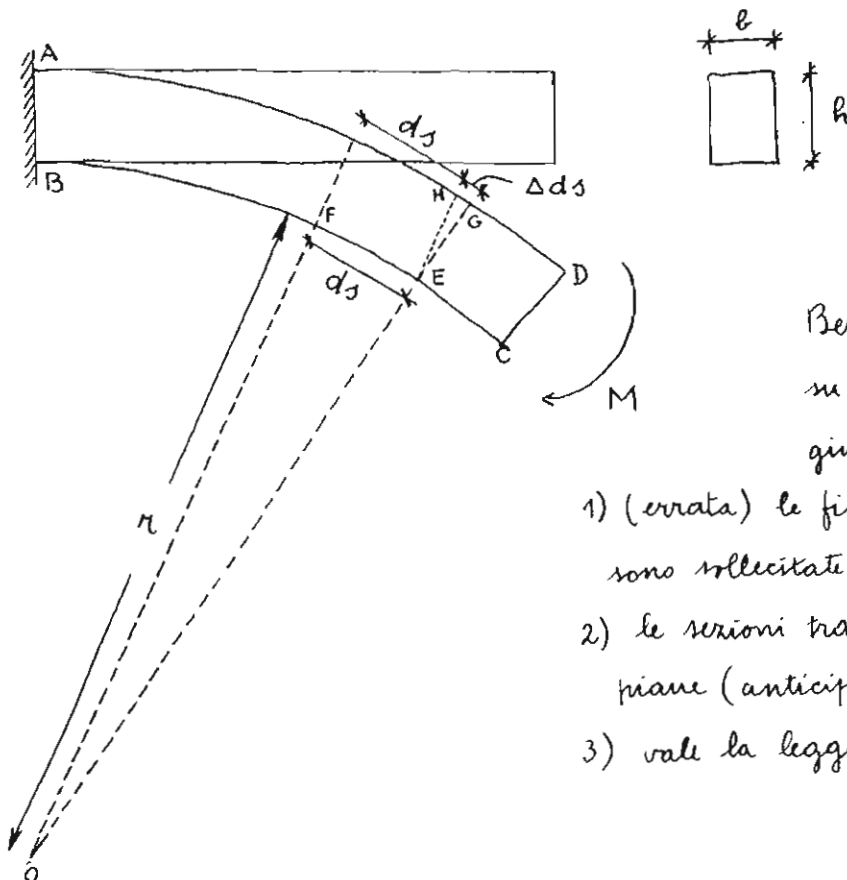
$$\frac{M}{W_x} \leq \sigma_{am}$$

12. 5 Bernoulli

Sinora abbiamo studiato il problema della trave presso (o tenso) inflessa dal punto di vista della tensione che in essa si manifesta. Ora ci proponiamo di studiare la deformazione.

I contributi fondamentali sono stati dati da Giacomo Bernoulli e da Leonardo Eulero.

La famiglia Bernoulli è originaria di Anversa. Alla fine del sec. XVI, per la persecuzione del Duca d'Alba, si rifugia a Basilea. Per più di cento anni fu una famiglia di matematici. Nel 1699 l'Accademia di Francia elesse i fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli come membri stranieri; fino al 1790 vi fu sempre qualche Bernoulli nell'Accademia.

Giacomo Bernoulli (1654-1705)

Bernoulli fonda la sua analisi su tre ipotesi, una errata e due giuste:

- 1) (errata) le fibre inferiori della trave non sono sollecitate (derivata da Mariotte)
- 2) le sezioni trasversali si mantengono piane (anticipazione dell'ipotesi di Navier)
- 3) vale la legge di Hooke.

Da queste ipotesi discende che le tensioni agenti sulla faccia trasversale, distribuite triangolarmente, danno luogo al momento risultante rispetto ad E:

$$M = \frac{1}{2} E \underbrace{\frac{\Delta ds}{ds}}_{\sigma_{media}} \underbrace{b h}_{\text{area sez. trasv.}} \underbrace{\frac{2}{3} h}_{\text{braccio}}$$

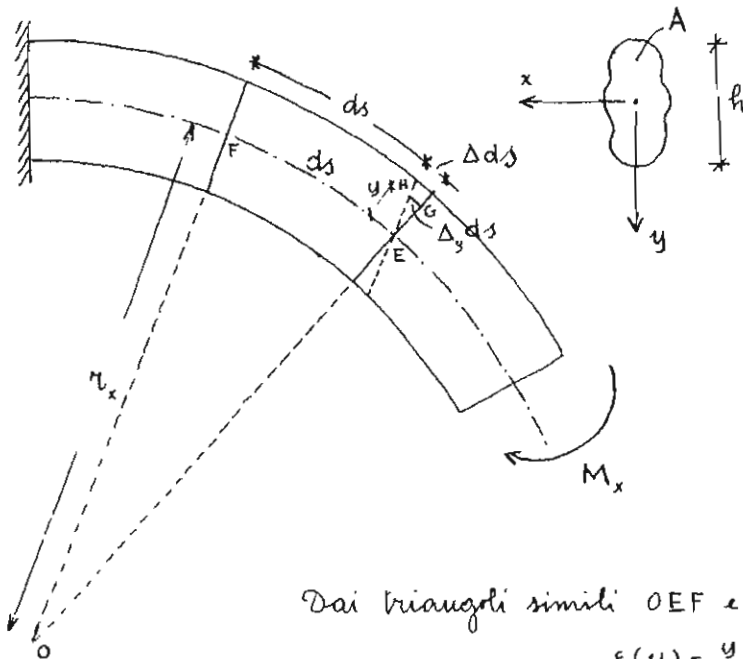
Poiché i triangoli OEF e EGH sono simili, si ha:

$$\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{h}{r}$$

Posto $C = \frac{1}{3} E b h^3$ segue allora:

$$M = \frac{C}{r} \quad (*)$$

Osservazione: poiché l'ipotesi 1) è errata, anche la formula (*) che ne consegue non è del tutto soddisfacente. Possiamo però trovare la formula corretta, seguendo il ragionamento di Bernoulli, modificandolo opportunamente e generalizzandolo.



Consideriamo una trave di sezione qualunque soggetta a momento flettente M . Per una fibra distante y dall'asse della trave è:

$$\epsilon(y) = \frac{\Delta y ds}{ds}$$

Dai triangoli simili OEF e EGH segue:

$$\epsilon(y) = \frac{y}{r_x} \rightarrow \sigma(y) = E \frac{y}{r_x}$$

Per tanto:

$$M_x = \int_A E \frac{y}{r_x} \cdot y dA = \frac{E J_x}{r_x} \rightarrow M_x = \frac{E J_x}{r_x} \quad (o)$$

Definendo la curvatura κ come inverso del raggio di curvatura r , ossia:

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

la (o) si scrive anche così:

$$EJ \kappa = M$$

(si è ommesso l'indice x). Questa formula è fondamentale per lo studio delle travi elastiche. Prima di esaminarne le applicazioni, ricordiamo brevemente alcuni contributi dati alla scienza delle costruzioni da Giovanni e da Daniele Bernoulli.

Giovanni Bernoulli (1667-1748). Noto soprattutto come matematico: il frutto del suo insegnamento è contenuto nel trattato di Calcolo del Marchese de l'Hôpital (1696).

Si deve a Giovanni Bernoulli una formulazione rigorosa e generale del principio dei lavori virtuali, che nel corso del nostro itinerario storico era sempre apparso limitato, nelle sue applicazioni, alla leva. Tale formulazione è contenuta in una lettera del 1727 a Varignon:

"Concevez plusieurs forces différentes qui agissent suivant différentes tendances ou directions pour tenir en équilibre un point, une ligne, une surface, ou un corps; concevez aussi que l'on imprime à tout le système de ces forces un petit mouvement...; chacune de ces forces avancera ou reculera dans sa direction... ce que j'appelle vitesses virtuelles... En tout équilibre de forces quelconques... la somme des Énergies affirmatives sera égale à la somme des Énergies négatives prises affirmativement."

Torneremo su questo enunciato quando parleremo della meccanica delle strutture elastiche nel cap. 4.

Daniele Bernoulli (1700-1782), noto soprattutto per l'Hydrodynamica, è ricordato nella teoria dell'elasticità per aver suggerito ad Eulero la via "variazionale" per lo studio delle travi inflesse. Egli, ancora, ricavò per primo l'equazione delle piccole vibrazioni trasversali a regime della trave prismatica.

13. Leonardo Eulero (1707 - 1783)

Nasce da un pastore protestante vicino a Basilea. 1720: entra nell'Università di Basilea dove segue le lezioni di Giovanni Bernoulli. A 16 anni si diploma; quindi partecipa a un concorso internazionale dell'Accademia di Francia. 1725: i Bernoulli sono invitati come membri dell'Accademia di Pietroburgo. 1727: Eulero diventa ivi membro associato. 1730: membro dell'Accademia di Pietroburgo e capo del dipartimento di matematica. 1736: "Mechanica sive motus scientia analytice exposita": il fine fondamentale di E. è quello di dimostrare che le leggi della meccanica sono verità "necessarie" (verità di ragione e non di fatto) onde poter costituire una disciplina rigorosamente deduttiva. 1741: invitato da Federico II di Prussia si stabilisce a Berlino e diventa membro dell'Accademia.

1744: "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes"

1748: "Introduzione al Calcolo"; 1755: "Calcolo differenziale". 1759:

alla morte di Maupertuis è nominato presidente dell'Accademia di Prussia.

1760: guerra dei sette anni; Berlino è occupata dai Russi; la casa di Eulero è saccheggiata: il generale russo Foltzen e la stessa imperatrice Elisabetta risarciscono i danni. 1766: Caterina II ottiene da E. torni a Pietroburgo. 1768-70:

"Calcolo integrale". Dal 1766 diventa cieco.

Ovviamente si limiterà qui il discorso ad alcuni dei risultati ottenuti da Eulero nel campo della Scienza delle Costruzioni. Il saggio fondamentale in proposito è "Methodus inveniendi lineas curvas.." (1744)

La formola di Bernoulli:

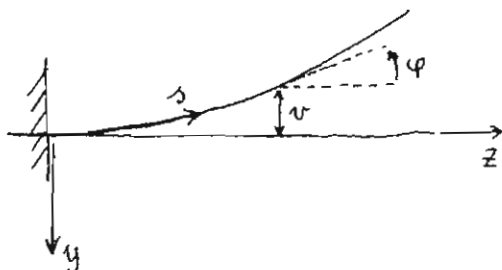
$$EJ \kappa = M$$

può consentire lo sviluppo di efficaci metodi per lo studio di una struttura

elastica quando si esprime la curvatura in funzione dello spostamento trasversale $v(z)$ (positivo x concorde con l'asse y).

Sappiamo che per definizione è:

$$\kappa = \frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds}$$



Dalla identità :

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{dv}{dz} \quad (\varphi \text{ è positivo se antiorario})$$

segue, derivando rispetto a z :

$$(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dz} = - \frac{d^2 v}{dz^2} \quad (\square)$$

D'altra parte è :

$$ds = \sqrt{dz^2 + dv^2} = \sqrt{dz^2 + v'^2 dz^2} = dz \sqrt{1 + v'^2}$$

Pertanto la (\square) si può scrivere così :

$$(1 + v'^2) \cdot \frac{1}{\kappa} \cdot \sqrt{1 + v'^2} = -v''$$

Da cui :

$$\frac{1}{\kappa} = - \frac{v''}{(1 + v'^2)^{3/2}}$$

La formula $EJ\kappa = M$ si traduce quindi nella :

$$\boxed{\frac{EJ v''}{(1 + v'^2)^{3/2}} = -M} \quad (\Delta)$$

la quale è una equazione differenziale nella funzione incognita $v(z)$, quando sia nota la funzione $M(z)$.

Se si suppongono "infinitesimi" gli spostamenti $v(z)$, con le derivate, (ossia se si ammette di poter trascurare le quantità v^2, v'^2, \dots rispetto a v, v', \dots) la (Δ) prende la forma lineare utile per le applicazioni :

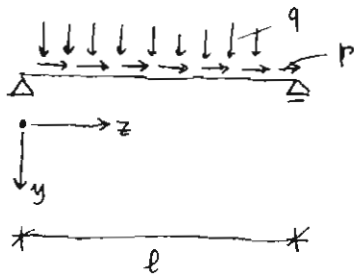
$$\boxed{EJ v'' = -M} \quad (\nabla)$$

Del resto, nell'ipotesi detta, la (∇) si deduce direttamente; infatti è :

$$\frac{1}{\kappa} \approx \frac{d\varphi}{dz} \quad ; \quad \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi = - \frac{dv}{dz} \quad \rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\kappa} \approx - \frac{d^2 v}{dz^2}$$

La (∇) è nota col nome di equazione ridotta della linea elastica ed è immediatamente utilizzabile oquiqualevolta sia noto il diagramma $M(z)$ (ossia nelle travi isostatiche).

Eulero conosce ed applica le relazioni tra le caratteristiche di sollecitazioni N, M, T , già studiate nel Corso di Statica:



$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} + P = 0 & (a) \\ \frac{dT}{dz} + q = 0 & z \in (0, l) \quad (b) \\ \frac{dM}{dz} = T & (c) \end{cases}$$

Da (b) e (c) segue, come è noto:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q \quad (d)$$

Quindi, derivando la (d) due volte rispetto a z e tenendo conto della (d) Eulero giunge alla equazione fondamentale:

$$\boxed{(EJ v'')'' = q} \quad (*)$$

detta equazione della linea elastica.

La (*) riassume in sé:

- la condizione statica di equilibrio $\frac{d^2 M}{dz^2} = -q$
- la condizione geometrica $\kappa = -v''$ (la quale esclude implicitamente che lo spostamento possa presentare discontinuità o angolosità - e cioè, strappi o compenetrazioni di materia - per l'esigenza che $v(z)$ sia continua e derivabile con la derivata prima): si tratta di una condizione di congruenza.
- la condizione derivante dal legame elastico: $EJ \kappa = M$.

La (*) offre dunque una descrizione completa: mediante il suo utilizzo si è in grado di studiare il regime statico e deformativo di ogni trave elastica (piana e inizialmente rettilinea).

14. Applicazioni dell'equazione della linea elastica

$$M(z) = -m$$

$$\downarrow EJ v'' = m$$

$$EJ v' = mz + C_1$$

$$EJ v = m \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \quad C_1, C_2 \text{ cost. di integr.}$$

per $z=l \rightarrow v(l)=0, v'(l)=0$ da cui:

$$C_1 = -ml, \quad C_2 = m \frac{l^2}{2}$$

Quindi:

$$v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{mz^2}{2} - mlz + \frac{ml^2}{2} \right)$$



$$M(z) = -Pz$$

$$EJ v'' = Pz$$

$$EJ v' = \frac{Pz^2}{2} + C_1$$

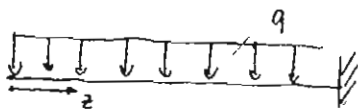
$$EJ v = \frac{Pz^3}{6} + C_1 z + C_2$$

per $z=l : v(l)=0, v'(l)=0$ da cui:

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{2}, \quad C_2 = \frac{Pl^3}{3}$$

Quindi:

$$v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{Pz^3}{6} - \frac{Pl^2z}{2} + \frac{Pl^3}{3} \right)$$



$$M(z) = -\frac{qz^2}{2}$$

$$EJ v'' = \frac{qz^2}{2}$$

$$EJ v' = \frac{qz^3}{6} + C_1$$

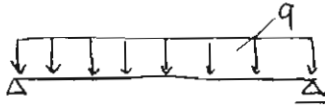
$$EJ v = \frac{qz^4}{24} + C_1 z + C_2$$

per $z=l : v(l)=0, v'(l)=0$ da cui:

$$C_1 = -\frac{ql^3}{6}, \quad C_2 = \frac{ql^4}{8}$$

Quindi:

$$v = \frac{1}{EJ} \left(\frac{qz^4}{24} - \frac{ql^3z}{6} + \frac{ql^4}{8} \right)$$



$$M(z) = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2}$$

$$EJ v'' = -\frac{qlz}{2} + \frac{qz^2}{2}$$

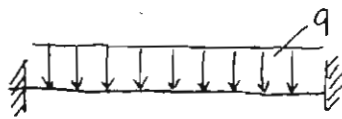
$$EJ v' = -\frac{qlz^2}{4} + \frac{qz^3}{6} + c_1$$

$$EJ v = -\frac{1}{12} qlz^3 + \frac{1}{24} qz^4 + c_1 z + c_2$$

Per $z=0$ $v(0)=0$ \rightarrow $c_2 = \frac{1}{24} ql^3$
 $z=l$ $v(l)=0$ \rightarrow $c_1 = 0$

Quindi:

$$v = \frac{q}{EJ} \left(-\frac{lz^3}{12} + \frac{z^4}{24} + \frac{l^3 z}{24} \right)$$



$$EJ v'''' = q$$

$$EJ v''' = qz + c_1$$

$$EJ v'' = \frac{1}{2} qz^2 + c_1 z + c_2$$

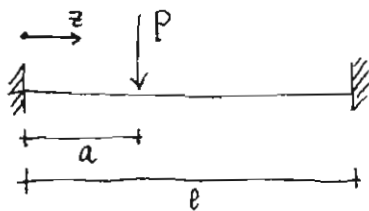
$$EJ v' = \frac{1}{6} qz^3 + \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$

$$EJ v = \frac{1}{24} qz^4 + \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

Per $z=0$ $v(0)=0$ \rightarrow $c_4 = 0$
 $v'(0)=0$ \rightarrow $c_3 = 0$
 $z=l$ $v(l)=0$ \rightarrow $\frac{1}{24} ql^4 + \frac{1}{6} c_1 l^3 + \frac{1}{2} c_2 l^2 = 0$
 $v'(l)=0$ \rightarrow $\frac{1}{6} ql^3 + \frac{1}{2} c_1 l^2 + c_2 l = 0$

Quindi:

$$v = \frac{ql^4}{24EJ} \left[\left(\frac{z}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4 \right]$$



Per $z \in [0, a)$

$$EJ v_1'''' = 0 \rightarrow$$

$$EJ v_1'''' = c_1$$

$$EJ v_1''' = c_1 z + c_2$$

$$EJ v_1'' = \frac{1}{2} c_1 z^2 + c_2 z + c_3$$

$$EJ v_1' = \frac{1}{6} c_1 z^3 + \frac{1}{2} c_2 z^2 + c_3 z + c_4$$

Condiz. al contorno:

per $z=0$: $v_1(0)=0$

$v_1'(0)=0$

per $z=l$: $v_2(l)=0$

$v_2'(l)=0$

Condiz. di raccordo:

per $z=a$: $v_1(a) = v_2(a)$; $v_1'(a) = v_2'(a)$

$-EJ v_1''(a) = -EJ v_2''(a)$; $EJ v_2'''' - EJ v_1'''' = P$

Per $z \in (a, l]$

$$EJ v_2'''' = 0 \rightarrow$$

$$EJ v_2'''' = c_5$$

$$EJ v_2''' = c_5 z + c_6$$

$$EJ v_2'' = \frac{1}{2} c_5 z^2 + c_6 z + c_7$$

$$EJ v_2' = \frac{1}{6} c_5 z^3 + \frac{1}{2} c_6 z^2 + c_7 z + c_8$$

15. Un'altra importante applicazione dell'equazione della linea elastica.

È opportuno, a questo punto, accennare ad un utile procedimento per la determinazione degli spostamenti nella trave elastica, dovuto a un eminente scienziato tedesco dell'ottocento: Otto Mohr (1835-1918). È un metodo che si vale dell'analogia formale tra due equazioni che già conosciamo; la prima è l'equazione indefinita d'equilibrio:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q \quad (\alpha)$$

la seconda è l'equazione di Bernoulli-Eulero esaminata nei paragrafi precedenti, espressiva della congruenza e del legame elastico lineare:

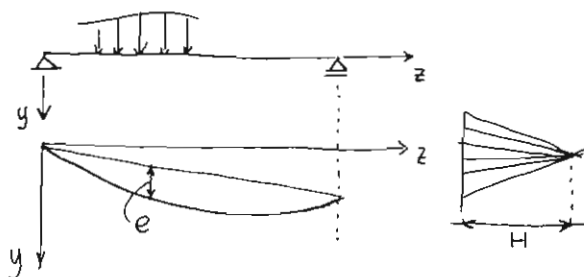
$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M}{EJ} \quad (\beta)$$

L'evidente analogia di queste due equazioni (entrambe connettono la derivata seconda del termine incognito, $M(z)$ e $v(z)$ rispettivamente, al termine noto, $-q(z)$ e $\frac{M(z)}{EJ}$ rispettivamente) per più di un secolo non fu convenientemente utilizzata. Fu appunto O. Mohr che nel 1868 per primo ne trasse semplici ed efficaci conseguenze (*) [Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins, 1868].

Per rendere più visibile l'analogia definiamo un "carico fittizio" q^* (dimensionalmente è una curvatura!) mediante la:

$$q^* = \frac{M}{EJ}$$

(*) In verità Mohr inizialmente considerò, in luogo della $\frac{d^2 M}{dz^2} = -q$, l'equazione differenziale della curva funicolare che, come è noto dal Corso di Statica,



è $\frac{d^2 y}{dz^2} = -\frac{q}{H}$; d'altra parte, da questa segue anche (vedi la fig.) la $\frac{d^2 e}{dz^2} = -\frac{q}{H}$ e, ancora, la $\frac{d^2 H e}{dz^2} = -q$ che equivale alla:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = -q.$$

e un "momento flettente fittizio" mediante la :

$$M^* = v \quad (\gamma)$$

Inserendo dunque q^* e M^* nella (β), questa prende la forma :

$$\frac{d^2 M^*}{dz^2} = -q^*$$

ossia viene ad esprimere la condizione che M^* sia equilibrato con q^* .

In altri termini, l'equazione che in virtù della congruenza (e del legame elastico) determina lo spostamento v a partire da $\frac{M}{EJ}$, si tramuta nell'equazione che in virtù dell'equilibrio determina il momento fittizio M^* a partire dal carico fittizio q^* .

Ne deriva che lo spostamento nella trave può essere calcolato considerando una trave ausiliaria, caricata con q^* e determinandone il momento flettente M^* . Questo metodo, così sinteticamente richiamato è generalmente noto come applicazione del "corollario di Mohr".

Prima di passare agli esempi, osserviamo che, derivando ambo i membri della (γ) rispetto a z si ha :

$$\frac{dM^*}{dz} = \frac{dv}{dz}$$

e, ricordando che il rispetto dell'equilibrio nella trave ausiliaria impone $\frac{dM^*}{dz} = T^*$, si ha ancora :

$$T^* = \frac{dv}{dz}$$

Si può allora concludere che per determinare la rotazione v' in una sezione della trave si può determinare nella sezione corrispondente della trave ausiliaria il valore di T^* indotto da q^* .

In sintesi, riportiamo qui di seguito le relazioni fondamentali dell'analogia :

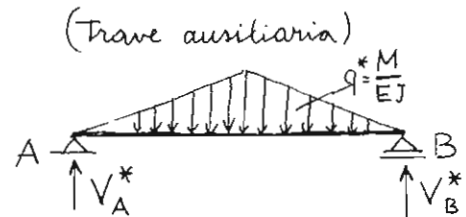
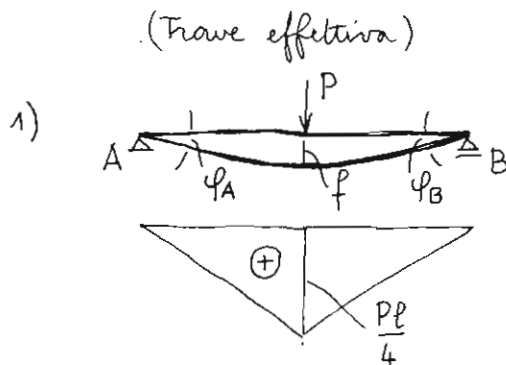
$$q^* = \frac{M}{EJ}$$

$$M^* = v \quad (\delta)$$

$$T^* = v'$$

Consideriamo dapprima la trave appoggiata agli estremi. In questo caso, come vedremo, la trave ausiliaria è una trave di ugual lunghezza appoggiata essa pure agli estremi. Il calcolo degli spostamenti (e delle rotazioni) in sezioni assegnate della trave procede in modo del tutto elementare.

Esempi.



Si ha:

$$V_A^* = V_B^* = \frac{1}{EJ} \frac{Pl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Pl^2}{16EJ}$$

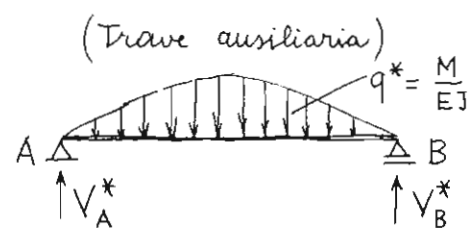
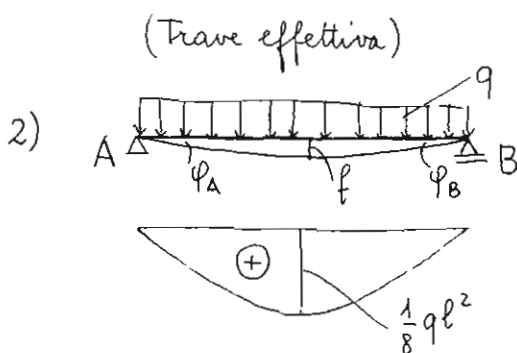
$$M^*\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^2}{16EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl}{4EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} l = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

Pertanto:

$$f = v\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}$$

$$\varphi_A = v'(0) = T^*(0) = V_A^* = \frac{1}{16} \frac{Pl^2}{EJ} \quad (\varepsilon)$$

$$\varphi_B = -v'(l) = -T^*(l) = V_B^* = \frac{1}{16} \frac{Pl^2}{EJ}$$



Si ha:

$$M(z) = \frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2}, \text{ e quindi:}$$

$$q^*(z) = \frac{q}{2EJ} (lz - z^2)$$

$$V_A^* = V_B^* = \frac{1}{2} \int_0^l q^*(z) dz = \frac{q}{4EJ} \left(\frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{3} \right) = \frac{ql^3}{24EJ}$$

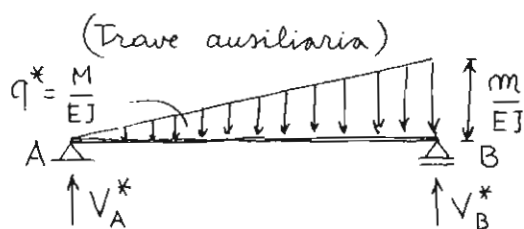
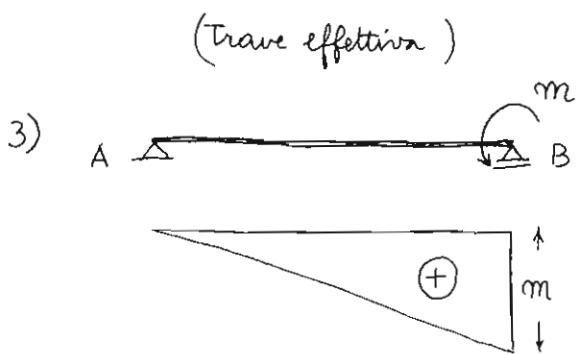
$$M^*\left(\frac{l}{2}\right) = V_A^* \cdot \frac{l}{2} - \int_0^{l/2} q^*(z) \left(\frac{l}{2} - z \right) dz = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

Pertanto:

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = M^*\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\varphi_A = v'(0) = T^*(0) = V_A^* = \frac{ql^3}{24EJ}$$

$$\varphi_B = -v'(l) = -T^*(l) = V_B^* = \frac{ql^3}{24EJ}$$



Si ha:

$$V_A^* = \frac{m}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{ml}{6EJ}$$

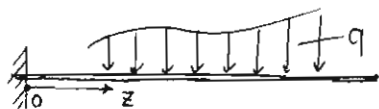
$$V_B^* = \frac{m}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{ml}{3EJ}$$

Pertanto:

$$\varphi_A = v'(0) = T^*(0) = V_A^* = \frac{ml}{6EJ}$$

$$\varphi_B = -v'(l) = -T^*(l) = V_B^* = \frac{ml}{3EJ} \quad (\xi)$$

Sia data ora una trave incastrata-libera; ci rendiamo subito conto



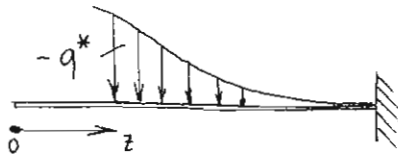
che la trave ausiliaria non può essere vincolata nello stesso modo (se così fosse, si tratterebbe

ad esempio la conclusione che l'estremo libero della trave non si sposta e non ruota per una generica distribuzione del carico q !). Come dovrà dunque esser vincolata per consentire, ancora, l'utilizzo della analogia di Mohr?

Sono appunto le relazioni (δ) ad indicarcelo. Mentre per i punti interni della trave l'analogia è automaticamente soddisfatta per l'identica forma delle equazioni (α) e (β) , per gli estremi occorre imporre alla trave ausiliaria vincoli tali da rendere le (δ) valide per qualunque definizione del carico.

Allora, con riferimento alla trave incastrata-libera, si osserva che deve essere, per $z=0$, $v(0) = v'(0) = 0$, mentre nessuna condizione geometrica "a priori" può essere assegnata per $z=l$. La trave ausiliaria dovrà pertanto

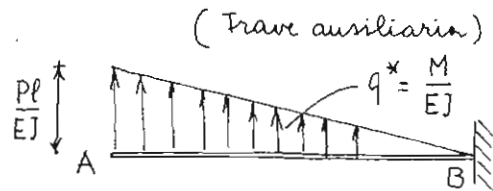
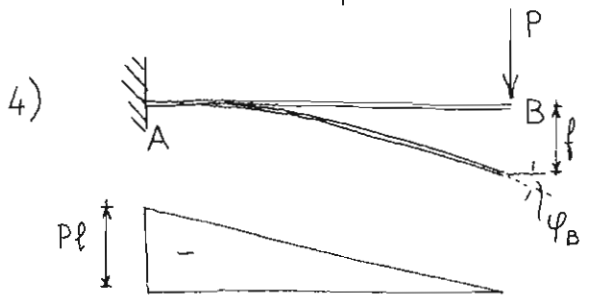
esser vincolata in modo che, per $z=0$, sia $M^*(0)=0$ e $T^*(0)=0$ (qualunque sia q^*); invece, per $z=l$, devono poter essere non nulli M^* e T^* . Ciò basta a determinare la trave ausiliaria; essa è



libera in $z=0$ e incastrata in $z=l$.

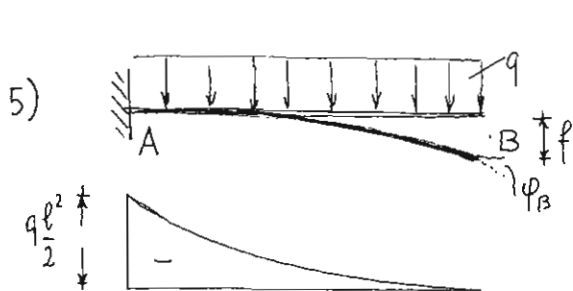
In modo analogo si procede per altre condizioni di vincolo: in particolare, è immediato riconoscere che la trave ausiliaria per la trave doppiamente appoggiata è ancora doppiamente appoggiata, come si era sopra preannunciato.

Esempi.



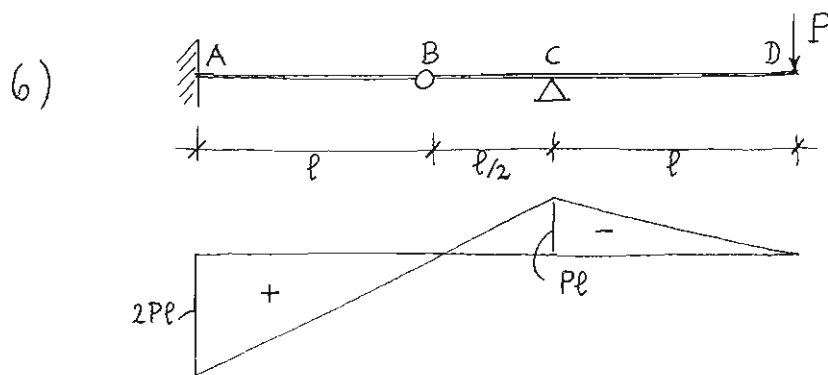
Risulta: $M_B^* = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l \cdot \frac{2}{3} l = \frac{Pl^3}{3EJ}$
 $T_B^* = \frac{Pl}{EJ} \cdot \frac{1}{2} l = \frac{Pl^2}{2EJ}$

Da cui: $f = v(l) = \frac{Pl^3}{3EJ}$
 $\varphi_B = v'(l) = \frac{Pl^2}{2EJ}$



Risulta: $M_B^* = \frac{ql^4}{8EJ}$
 $T_B^* = \frac{ql^3}{6EJ}$

Da cui: $f = v(l) = \frac{ql^4}{8EJ}$
 $\varphi_B = v'(l) = \frac{ql^3}{6EJ}$



Determiniamo lo spostamento verticale in D e la rotazione relativa in B.

Occorre, anzitutto, definire la trave ausiliaria. A tale scopo osserviamo che :

nella trave effettiva si ha :

e quindi nella trave ausiliaria

deve aversi :

in A : $v = 0$
 $v' = 0$

$M^* = 0$
 $T^* = 0$

in B : (può essere)
 $v \neq 0$
 $v'_{sin} \neq v'_{destra}$

(può essere)
 $M^* \neq 0$
 $T^*_{sin} \neq T^*_{destra}$

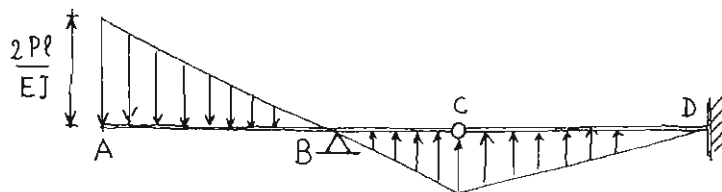
in C : $v = 0$
 $v'_{sin} = v'_{destra}$

$M^* = 0$
 $T^*_{sin} = T^*_{destra}$

in D : (può essere)
 $v \neq 0$
 $v' \neq 0$

(può essere)
 $M^* \neq 0$
 $T^* \neq 0$

Quindi la trave ausiliaria è data da



Le equazioni della statica applicate alla trave ausiliaria forniscono :

(polo in C) $\frac{2Pl}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \left(\frac{2}{3}l + \frac{l}{2} \right) - V_B^* \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{4EJ} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} = 0$

da cui : $V_B^* = \frac{9}{4} \frac{Pl^2}{EJ} = \text{rotazione relativa in B}$

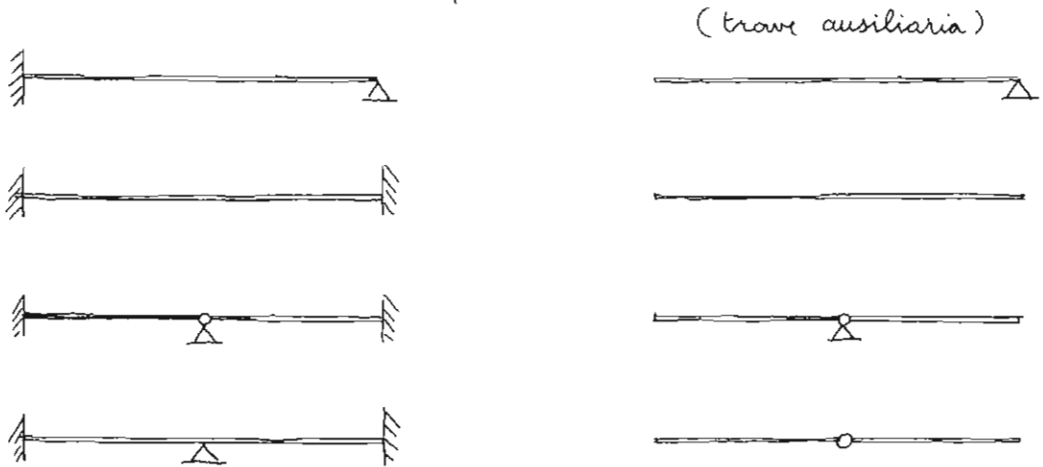
$$\text{(trasl. vert.)} \quad \frac{2Pl}{EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{4EJ} - \frac{Pl^2}{2EJ} - \frac{9}{4} \frac{Pl^2}{EJ} + V_D^* = 0$$

$$\text{da cui:} \quad V_D^* = \frac{2Pl^2}{EJ} = \text{rotazione in D}$$

$$\text{(polo in C)} \quad -\frac{2Pl^2}{EJ} \cdot l + \frac{Pl^2}{2EJ} \cdot \frac{1}{3} l + M_D^* = 0$$

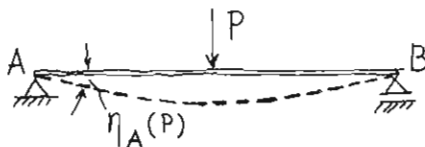
$$\text{da cui:} \quad M_D^* = \frac{11}{6} \frac{Pl^3}{EJ} = \text{spostamento verticale in D.}$$

Si può osservare che a una trave isostatica corrisponde una trave ausiliaria isostatica. Invece, a una trave iperstatica corrisponde una trave ausiliaria labile. Esempi:



Ciò suggerisce una interessante tecnica di soluzione delle travi iperstatiche. Consideriamo ad esempio la struttura della figura qui accanto. A linea tratteggiata è segnata la presumibile deformata: essa è caratterizzata dalla condizione che in B sia nullo lo spostamento e in A sia inoltre nulla la rotazione.

Associamo ora alla struttura effettiva una struttura staticamente determinata (detta "sistema principale") ottenuta "indebolendo" alcuni dei vincoli. Un sistema principale possibile è il seguente:



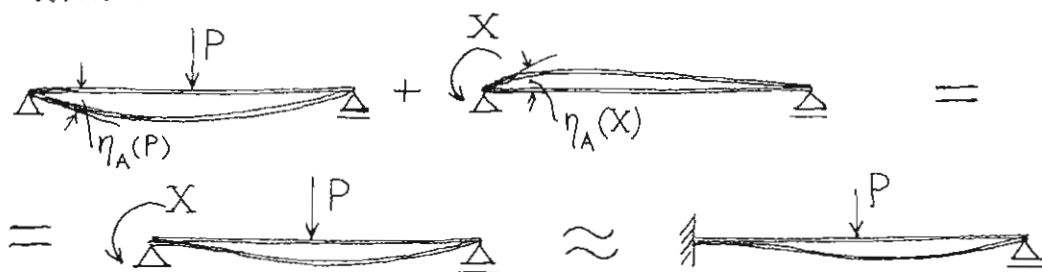
Naturalmente, la deformazione in tale sistema differisce da quella del sistema effettivo. In particolare,

la deformata non rispetta la condizione di mantenere orizzontale la tangente in A: infatti, in A si ha una rotazione $\eta_A(P)$.

La cosa può essere interpretata osservando che l'incastro in A della trave effettiva realizza un momento reattivo capace di neutralizzare la rotazione che sarebbe indotta dal carico esterno P. Ossia, si può dire che il sistema principale si comporta in modo uguale a quello effettivo se su di esso agisce oltre al carico P un momento X in A capace di imprimere in A una rotazione $\eta_A(X)$ uguale e contraria ad $\eta_A(P)$.

Il momento X prende il nome di reazione iperstatica.

La figura seguente rappresenta in modo sintetico il ragionamento svolto:



Il risultato già ottenuto applicando l'equazione della linea elastica e il corollario di Mohr consentono di determinare X; dalle (ϵ) e (ξ) si trae infatti:

$$\eta_A(P) = \frac{1}{16} \frac{Pl^2}{EJ} \quad ; \quad \eta_A = -\frac{Xl}{3EJ}$$

Pertanto la condizione di congruenza:

$$\eta_A(P) = -\eta_A(X) \quad (7)$$

fornisce:

$$\frac{Pl^2}{16EJ} = \frac{Xl}{3EJ}$$

e quindi:

$$X = \frac{3}{16} Pl$$

A questo punto il problema iperstatico è risolto; infatti, l'aver determinato X consente di assimilare, sotto ogni riguardo, il sistema

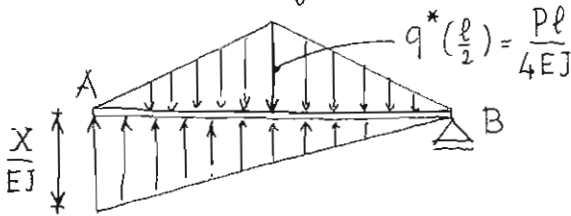
effettivo al "sistema equivalente" (staticamente determinato):



Tuttavia, come si è detto sopra, per la determinazione della reazione iperstatica X , si può utilizzare anche l'osservazione che a una trave iperstatica corrisponde una trave ausiliaria labile. In effetti, l'analogia di Mohr assicura che la congruenza della trave effettiva si tramuta in equilibrio della trave ausiliaria.

Quindi, la condizione necessaria a determinare l'iperstatica X può essere ottenuta, anziché esprimendo la congruenza in A , come nella (7), esprimendo l'equilibrio della trave ausiliaria soggetta ad un carico fittizio q^* corrispondente sia al carico esterno P , sia all'iperstatica X .

La trave ausiliaria è pertanto soggetta alla seguente distribuzione di carico fittizio:



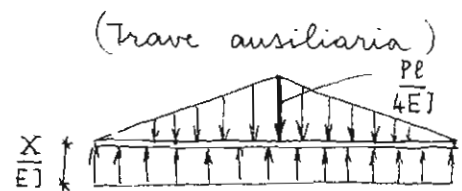
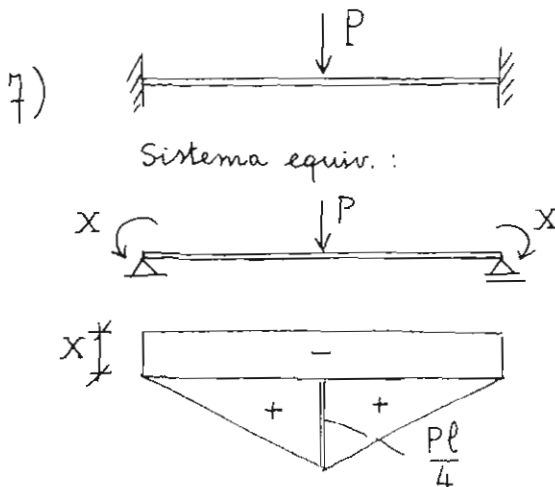
Essa è in equilibrio se X soddisfa la condizione:

$$(eq. alla rot.; polo in B) \quad \frac{Pl}{4EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{X}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = 0$$

da cui si trae:

$$X = \frac{3}{16} Pl$$

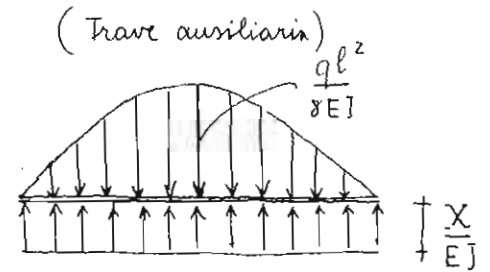
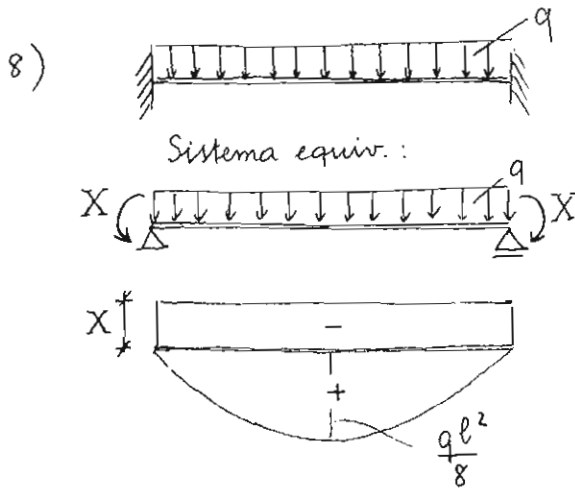
Altri esempi:



(equil. alla trasl. vert.):

$$\frac{Pl}{4EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Xl}{EJ} = 0$$

Da cui: $X = \frac{Pl}{8}$



(eq. di equil. alla trasl. vert.)

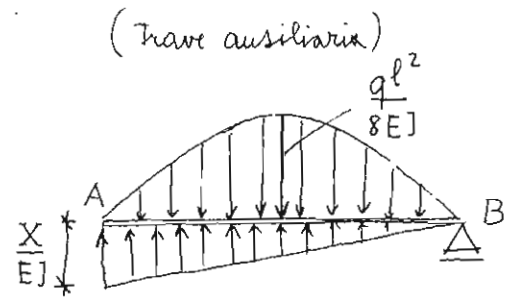
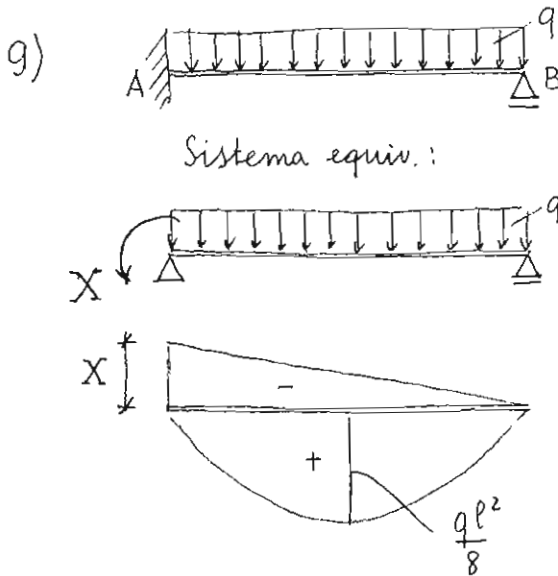
$$\frac{1}{EJ} \int_0^l \left(\frac{ql}{2} z - \frac{qz^2}{2} \right) dz - \frac{Xl}{EJ} = 0$$

ossia:

$$\frac{ql^3}{12EJ} - \frac{Xl}{EJ} = 0$$

Da cui:

$$X = \frac{ql^2}{12}$$



(equil. alla rotazione; polo in B)

$$\frac{ql^3}{12EJ} \cdot \frac{l}{2} - \frac{X}{EJ} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3}l = 0$$

ossia:

$$\frac{ql^2}{24EJ} - \frac{X}{3EJ} = 0$$

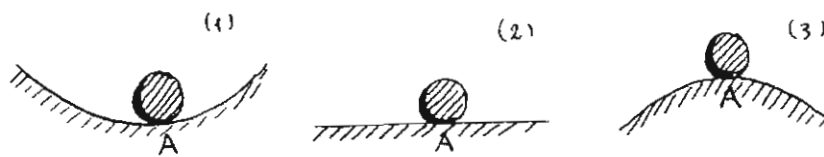
Da cui:

$$X = \frac{1}{8} ql^2$$

16. EULERO e il problema di indifferenza dell'equilibrio.Premessa -

Per intendere il significato della trattazione svolta da Eulero sulla indifferenza dell'equilibrio elastico, è opportuno soffermarsi su qualche considerazione preliminare.

1) Consideriamo i tre casi segnati in figura. In tutti e tre

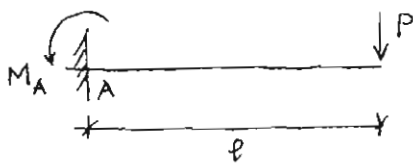


i casi, la pallina è in equilibrio se posta in A. Ma diversa è la qualità dell'equilibrio.

Nel caso (1) si dice che l'equilibrio è stabile; nel caso (2) che l'equilibrio è indifferente; nel caso (3) che l'equilibrio è instabile.

2) Una ipotesi fondamentale semplificativa nello studio delle strutture deformabili elasticamente è che per determinare lo stato di sollecitazione in una struttura sia lecito riferirsi alla configurazione indeformata.

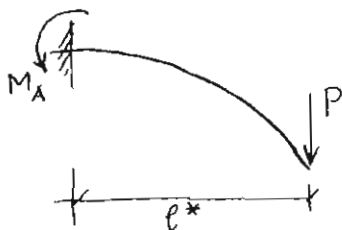
Es.:



Il momento in A, secondo la trattazione usuale, è:

$$M_A = Pl$$

In verità questo risultato non è rigorosamente corretto, poiché, a causa di P la trave si deforma.



Il momento in A è dunque:

$$M_A = Pl^*$$

Ebbene, l'ipotesi sopra menzionata consiste nell'ammettere che sia lecito confondere l^* con l .

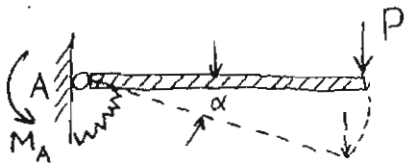
3) Anche l'equazione

$$(EJ v''')' = q$$

risente di tale ipotesi semplificativa. Per molti problemi della Scienza delle Costruzioni il trascurare (come si usa dire) l'effetto della deformazione sulla determinazione della sollecitazione non genera gravi inconvenienti (si tratta spesso soltanto di una modesta imprecisione nei risultati). Esistono invece dei casi nei quali, se si adotta quella ipotesi, le conclusioni a cui conducono i calcoli non sono soltanto imprecise sul piano quantitativo, ma sono anche errate sul piano qualitativo.

Diamo ora due esempi: nel primo si vedrà che la soluzione semplificata differisce da quella rigorosa solo per uno scarto quantitativo nella valutazione della sollecitazione; nel secondo, si vedrà invece che la teoria semplificata (fondata sulla ipotesi detta) non è in grado di descrivere alcuni aspetti essenziali e applicativamente rilevanti del fenomeno fisico.

Es. 1.:



Trave rigida; incastro elastico.

Il momento di incastro M_A è proporzionale alla rotazione α :

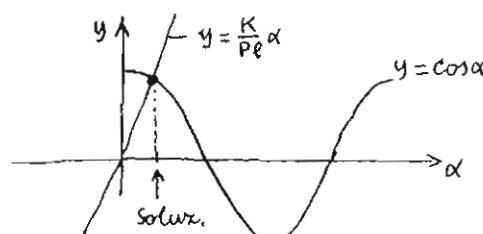
$$M_A = K \alpha \quad K \text{ cost.}$$

Soluzione semplificata:

$$\begin{aligned} M_A &= K \alpha \\ \text{(per l'equil.) } \boxed{M_A &= Pl} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{Pl}{K}$$

Soluzione rigorosa

$$\begin{aligned} M_A &= K \alpha \\ \text{(per l'equil.) } M_A &= Pl \cos \alpha \end{aligned} \quad \rightarrow \quad K \alpha = Pl \cos \alpha ; \quad \text{soluzione grafica:}$$



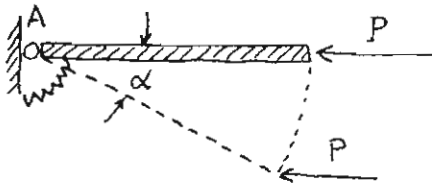
$$\begin{cases} y = \cos \alpha \\ y = \frac{K}{Pl} \alpha \end{cases}$$

Si vede che per valori elevati di $\frac{k}{P}$ rispetto a P la retta $y = \frac{k}{Pl} \alpha$ è fortemente pendente ed interseca la cosinussoide per $y \approx 1$. Ne segue:

$$\alpha \approx \frac{Pl}{k}$$

così come era previsto dalla teoria semplificata.

Es. 2. :



Trave rigida ; incastro elasticam. cedevole.

$$M_A = K\alpha. \quad (*)$$

Ci proponiamo il seguente problema:
è possibile che oltre alla configurazione orizzontale si verifichi una configurazione variata di equilibrio (vedi fig.)?

Teoria semplificata : Se nel calcolo di M_A ci riferiamo alla configurazione indeformata, dobbiamo concludere:

$$M_A = 0$$

Da ciò segue, per la (*), $\alpha = 0$.

Cioè, secondo la teoria semplificata si dovrebbe infine affermare che l'unica configurazione equilibrata possibile è quella orizzontale.

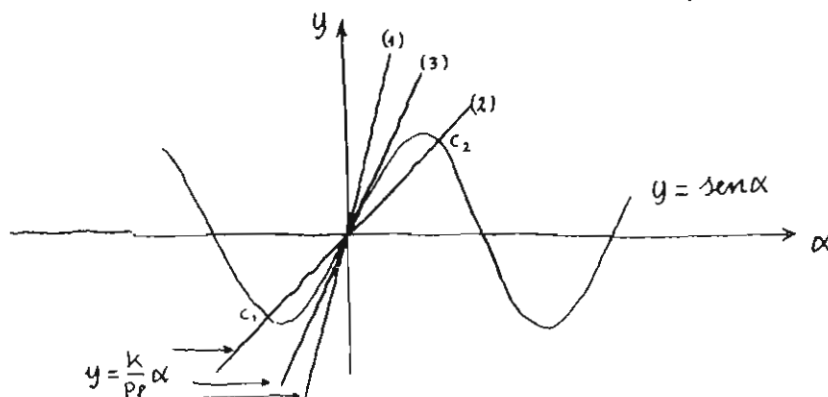
Teoria rigorosa : Ammettiamo che si verifichi una rotazione α . Nel calcolo della sollecitazione (M_A) ci riferiamo, correttamente, alla configurazione deformata. Allora si ha:

$$M_A = K\alpha$$

$$(\text{per l'equil.}) M_A = Pl \operatorname{sen} \alpha$$

Da cui :

$$(**) \quad K\alpha = Pl \operatorname{sen} \alpha \quad ; \quad \text{soluz. grafica} : \quad \begin{cases} y = \operatorname{sen} \alpha \\ y = \frac{k}{Pl} \alpha \end{cases}$$

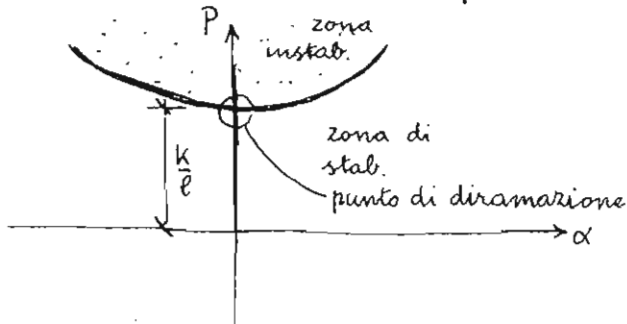


Si vede che per $\frac{k}{Pe} > 1$ la retta $y = \frac{k}{Pe} \alpha$ (caso (1)) interseca la sinusoida solo nell'origine, ossia per $\alpha = 0$; ciò vuol dire che per $\frac{k}{Pe} > 1$ è possibile solo la configurazione orizzontale: essa dunque è stabile.

Invece per $\frac{k}{Pe} < 1$ (caso (2)) la retta interseca la sinusoida anche in due punti α_1, α_2 ; ciò vuol dire che per $\frac{k}{Pe} < 1$ sono possibili configurazioni variate di equilibrio: la configurazione orizzontale è instabile (lo si può dimostrare).

Infine, per $\frac{k}{Pe} = 1$ la retta è tangente alla sinusoida nell'origine; (caso (3)) ciò significa che in un intorno infinitesimo dell'origine sono possibili configurazioni variate di equilibrio "infinitamente" prossime alla configurazione fondamentale orizzontale.

È utile visualizzare il diagramma (P, α) . Dalla (**) segue:



$$P = \frac{k}{e} \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

Il valore di P : $P_{\alpha} = \frac{k}{e}$ (corrispondente alla retta $y = \frac{k}{Pe} \alpha$ tangente alla sinusoida nell'origine) prende il nome di carico critico e designa una situazione di indifferenza dell'equilibrio.

Per lo studio della situazione limite di indifferenza si può adottare un metodo di indagine semplificato: si ammette che α sia infinitesimo, ma si rimuove l'ipotesi che la deformazione non influisca sulla determinazione della sollecitazione. Allora si potrà scrivere:

$$M_A = k\alpha$$

$$M_A = Pl \sin \alpha \approx Pl\alpha$$

$$\text{Da cui: } Pl\alpha = k\alpha \rightarrow (Pl - k)\alpha = 0 \quad (*)$$

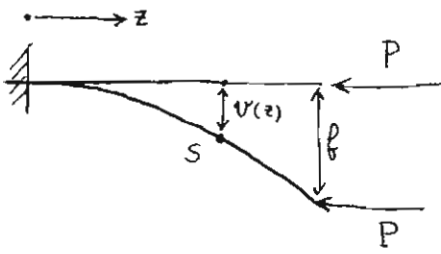
La (*) offre l'alternativa:

$$\alpha = 0 \quad (\rightarrow \text{stabilità (o instab.) dell'equil.})$$

opp.

$$P = \frac{k}{e} \quad (\rightarrow \text{indifferenza dell'equil.})$$

Trattazioni di Eulero per la trave elastica.



Proporiamoci il problema analogo a quello considerato precedentemente: possono esistere, per certi valori del carico P configurazioni di equilibrio variate rispetto a quella fondamentale rettilinea?

Con riferimento alla sezione S è:

$$M(z) = -P(f - v(z))$$

D'altra parte:

$$M(z) = -EJ v''$$

Quindi deve essere:

$$EJ v'' + P v - P f = 0 \quad (\Delta)$$

Poniamo $\gamma = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$; la (Δ) prende la forma:

$$v'' + \gamma^2 v - \gamma^2 f = 0$$

L'integrale generale di questa equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è:

$$v = A \sin \gamma z + B \cos \gamma z + f \quad (A, B, f, \text{ cost. incognite})$$

Condizioni agli estremi (al contorno):

$$\text{per } z=0 \quad v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad B = -f$$

$$\text{" } z=0 \quad v'(0) = 0 \quad \rightarrow \quad A = 0$$

$$\text{" } z=l \quad v(l) = f \quad \rightarrow \quad f(\cos \gamma l - 1) = f$$

Anche qui si presenta l'alternativa:

$$f = 0 \quad (\rightarrow \text{unica conf. di equil. è quella orizzontale rettilinea})$$

oppure:

$$\cos \gamma l = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma l = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Consideriamo la determinazione $\gamma l = \frac{\pi}{2}$; ricordando la definizione di γ si trae il valore del carico critico:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$$

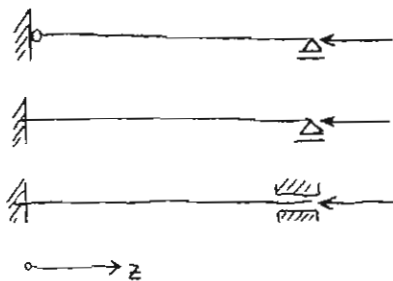
Per questa determinazione del carico P la funzione $v(z)$ si specifica così:

$$v = f(\cos \gamma z - 1)$$

dove la costante f è arbitraria (infinitesima); quindi, accanto alla configurazione fondamentale rettilinea possono esistere altre config. di equilibrio: situazione di indifferenza.

(N.B. le determinaz. $n = 1, 2, \dots$ non sono significative).

Altre condizioni di vincolo possono essere studiate:



L'equazione (Δ) si trasforma nella

$$EJ v'' + Pv + R(l-z) + M = 0$$

dove R, M sono le eventuali reazioni del vincolo. Derivando due volte rispetto a z si ottiene:

$$\boxed{(EJ v'')'' + Pv'' = 0} \quad (\square)$$

valida in ogni caso.

Osservazioni complementari sul risultato euleriano

1) All'aumentare del carico P , l'indifferenza si manifesterà per prima nel piano di inflessione rispetto al quale J è minimo. Quindi la (\square) va intesa così:

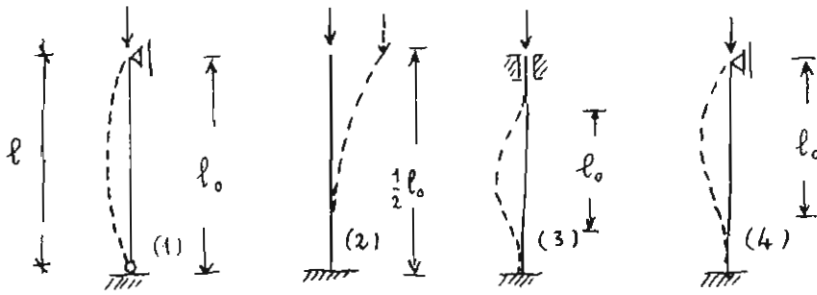
$$(EJ_{\min} v'')'' + Pv'' = 0$$

Ad esempio, nel caso già considerato della mensola, l'espressione del carico critico è:



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{4l^2}$$

2) Calcolando il carico critico euleriano per le travi in figura, si trova:



$$\text{caso (1)} : P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

$$\text{caso (2)} : P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(2l)^2}$$

$$\text{caso (3)} : P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\frac{1}{2}l)^2}$$

$$\text{caso (4)} : P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(0,71l)^2}$$

Si riconosce quindi la possibilità di definire una lunghezza l_0 con riferimento alla quale la formula determinatrice del carico critico è in ogni caso:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_0^2}$$

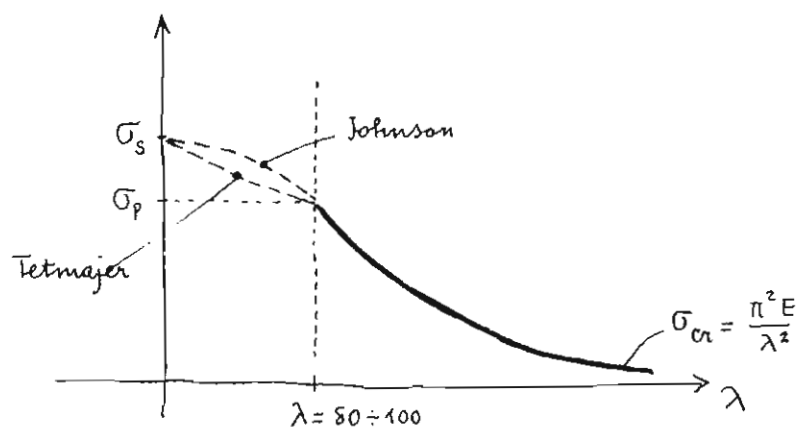
essendo: $l_0 = l$ (caso(1)); $l_0 = 2l$ (caso(2)); $l_0 = 0,5l$ (caso(3)); $l_0 = 0,71l$ (caso(4))

L'interpretazione geometrica di l_0 appare dalla figura. l_0 si chiama lunghezza libera di inflessione.

3) A P_{cr} corrisponde una tensione critica σ_{cr} :

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} \quad \text{dove} \quad \lambda = \frac{l_0}{\rho_{min}} \quad (\lambda : \text{snellera})$$

questa formula è valida solo se $\sigma_{cr} \leq \sigma_p$ poiché altrimenti si riferirebbe a determinazioni di σ per le quali non vale più la legge di Hooke che sta a fondamento della teoria sopra esposta.



per questi valori di λ si debbono usare formule opportune (teorico-speriment.) ad es. di Tetmajer o di Johnson-Ostenfeld

per questi valori di λ vale la formula di Eulero

4) Il metodo ω .

In pratica spesso si usa, in armonia con le prescrizioni ufficiali, il metodo ω . Per il dimensionamento di un'asta compressa sono necessarie due verifiche:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_s}{m} \\ \frac{N}{A} \leq \frac{\sigma_{cr}}{m_{cr}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{con } m = \text{coeff. di sicurezza}) \\ (\text{con } m_{cr} = \text{coeff. di sicurezza stabilito} \\ \text{per la sollecitaz. relativa all'indifferenza} \\ \text{dell'equilibrio}) \end{array}$$

Ci si può ricondurre a una sola verifica definendo, per ogni λ (> 20), il coefficiente $\omega(\lambda) = \frac{\sigma_s}{m} \cdot \frac{m_{cr}}{\sigma_{cr}} = \frac{m_{cr} \sigma_{am}}{\sigma_{cr}}$.

Il coeff. $\omega(\lambda)$ è sempre ≥ 1 ; è tabellato.

Le verifiche (*) sono quindi compendiate nella:

$$\frac{\omega N}{A} \leq \sigma_{am} = \frac{\sigma_s}{m}$$

Coefficienti ω per acciaio tipo 1 ($\sigma_{am} = 1600 \text{ Kg/cm}^2$)
(Norme CNR-UNI 10011-73)

λ	ω	λ	ω
20	1,14		
30	1,21		
40	1,30	150	4,34
50	1,39	160	4,94
60	1,49	170	5,58
70	1,62	180	6,25
80	1,77	190	6,97
90	1,95	200	7,72
100	2,17	210	8,52
110	2,41	220	9,34
120	2,78	230	10,34
130	3,26	240	11,12
140	3,78	250	12,06

16. Le indagini sperimentali sulle proprietà meccaniche dei materiali sino al 1700.

Sino al contributo di Hooke le conoscenze relative alla resistenza dei materiali rimasero ad uno stadio intuitivo. Gli studi scientifici del secolo XIV, sebbene importanti per lo sviluppo della scienza sperimentale, ebbero scarso rilievo nella tecnologia del costruire. In particolare le industrie del basso medioevo (metallurgiche e meccaniche) restarono legate ai sistemi di lavorazione tradizionali confermati dagli statuti corporativi.

Nei primi decenni del '400, importanti innovazioni si verificano nella tecnica delle chiuse e delle draghe per i canali navigabili, nei sistemi di lavorazione dei metalli, nell'uso del meccanismo biella-manovella. Le macchine civili e militari sono incorporate nell'architettura, nei trattati di L. B. Alberti (1452) e di Francesco di Giorgio (1470-80).

I teorici dell'architettura rinascimentale, seguendo l'esempio di Vitruvio, svolgono dissertazioni discorsive sulle proprietà del legno, della pietra naturale ed artificiale, occupandosi prevalentemente della deteriorabilità nel tempo. Così l'Alberti classifica le diverse specie di legno per le diverse prestazioni, descrive la collocazione geografica delle pietre, dà suggerimenti per la scelta delle argille nella confezione dei mattoni. Analoghi criteri in De Marchi e in Vasari.

Le prime indagini sulla resistenza meccanica provengono da fisici non interessati alle tecniche costruttive. Il primo materiale studiato nei secoli XVII e XVIII fu il vetro.

Mersenne (1626) e Mariotte (1670-1680) condussero esperienze sulla resistenza di materiali strutturali: barre di legno, metallo e vetro soggette a trazione e a flessione. Tali esperienze erano rivolte alla conferma della teoria di Galileo: naturalmente emergeva un contrasto con le tesi galileiane specialmente nelle relazioni tra la resistenza a trazione e la resistenza a flessione.

Nel 1720 furono aperte in Francia numerose scuole militari per l'addestramento nella tecnica delle fortificazioni e nell'artiglieria. Nel 1735 Belidor (1697-1761) pubblica un libro di testo per queste scuole; tratta di matematica ("Nouveau Cours de Mathématique à l'Usage de l'Artillerie et du Génie", Paris), ma anche di meccanica, di geodesia, di artiglieria. L'Analyse des Infinités Petites del Marchese de l'Hôpital è il primo libro di calcolo.

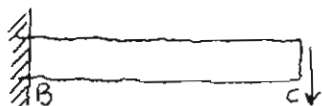
Nel 1729 Belidor aveva pubblicato la "Science des Ingénieurs" molto usata e ristampata sin nel 1830 con note ed aggiunte di Navier. In questo libro, nel capitolo dedicato alla resistenza dei materiali, B. non va oltre Galileo e Mariotte, applicando i risultati ai suoi esperimenti su travi di legno. Egli avverte i limiti della teoria, contraddetta da talune esperienze, ma raccomanda il dimensionamento secondo il criterio che la resistenza è proporzionale alla larghezza della trave e al quadrato dell'altezza. (Infatti sappiamo che $\sigma_{max} \cong \sigma \cdot h^2$).

Ancora, nel 1720, è costituito in Francia il Corpo degli ingegneri delle vie di comunicazione. Nel 1743 è fondata a Parigi la famosa École des Ponts et Chaussées. Il suo primo direttore fu:

Jean-Rodolphe Perronet (1708-1794): costruttore di numerosi ponti ad arco (ad es. a Neuilly sur Seine) e del canale di Borgogna. Egli progetta e installa nella École una nuova strumentazione per prove a trazione.

J. E. Lambardie è il secondo direttore della E. des P. et Ch.: a lui si debbono esperimenti su travi e colonne lignee.

Nel 1798 esce il primo libro di resistenza dei materiali di P. S. Girard "Traité Analytique de la Résistance des Solides" (Paris). La sua trattazione si riferisce alle teorie di Galileo e di Mariotte: vien consigliata la prima per i materiali soggetti a rottura fragile, e la seconda per travi di legno. Girard intuì che le fibre inferiori sono compresse; tuttavia mantiene la posizione



dell'asse neutro proposta da Mariotte (lungo BC).

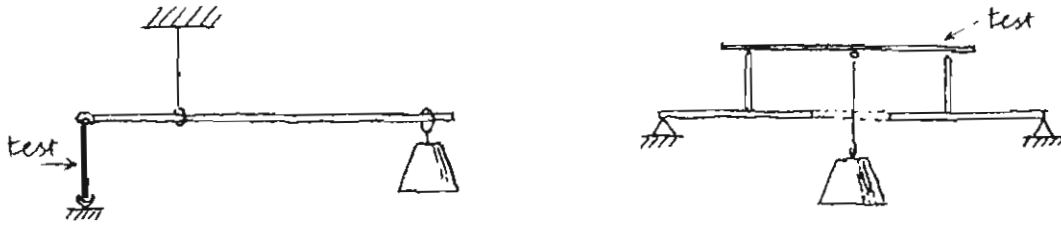
Si deve ancora a Girard lo studio del problema delle travi inflesse di uniforme resistenza; giunge così alla formula:

$$\frac{M}{W} = \text{cost}$$

Infine, Girard studia sperimentalmente il problema dell'instabilità delle colonne per confrontare il carico critico con quello euleriano.

Ricordiamo ancora:

Petrus van Musschenbroek (1692-1761): professore di fisica a Utrecht e poi a Leiden, in "Physicae experimentales et geometricae" descrive procedimenti sperimentali per prove a trazione, a flessione, a compressione, e fornisce tabulazioni complete sulla resistenza massima di diversi materiali. Nel 1729 egli osserva, quindici anni prima di Eulero, che la resistenza all'instabilità di aste sottili diminuisce con l^{-2} .



1742: Sulla base delle trattazioni del Musschenbroek si tentò di calcolare, per la prima volta, un elemento strutturale in funzione del carico statico:

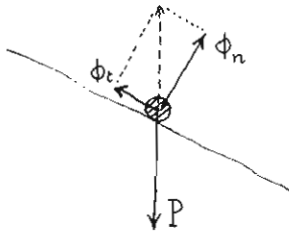
"Parere dei tre matematici sopra i danni che si sono trovati nella cupola di S. Pietro nel finire dell'Anno 1742"; Le Seur, Jacquier, Boscovich.

1755: la costruzione di Sainte Geneviève (l'attuale Pantheon) a Parigi, suscitò polemiche e discussioni interessanti la tecnica delle costruzioni. (L'architettura era curata da Soufflot). Gauthey (1732-1807), autore di trattati sulla costruzione dei Ponti, progettò dispositivi di prova simili a quelli di Musschenbroek. Fu il primo a definire il concetto di fattore di sicurezza.

17. C. A. Coulomb. (1736-1806).

Nasce ad Angoulême. Entra nel corpo degli ingegneri militari. Inviato nell'isola Martinique, esegue ivi varie opere strutturali e svolge attività sperimentale. Nel 1773 presenta all'Accademia di Francia un saggio fondamentale: "Sur une Application des Règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture". Tornato in Francia, lavora alla Rochelle, ad Aix, a Cherbourg. Nel 1779 e nel 1781 vince due premi all'Accademia. Dopo il 1781 vive a Parigi, membro dell'Accademia. Si occupa di elettrostatica. Nel 1789 si ritira a Blois. Nel 1793, chiusa l'Accademia, la Rivoluzione fonda l'Institut National des Sciences et des Arts. Coulomb ne è uno dei primi membri: presenta memorie sulla viscosità e sul magnetismo. Nel 1802 è incaricato dell'educazione pubblica.

Menzioniamo anzitutto i risultati delle esperienze sull'attrito statico e dinamico (1781):



Decomposta la reazione nella componente normale Φ_n e nella componente tangenziale Φ_t , l'equilibrio è garantito sino a che:

$$\Phi_t \leq f_s \Phi_n \quad f_s : \text{coeff. di attrito statico.}$$

Nel caso dinamico si ha:

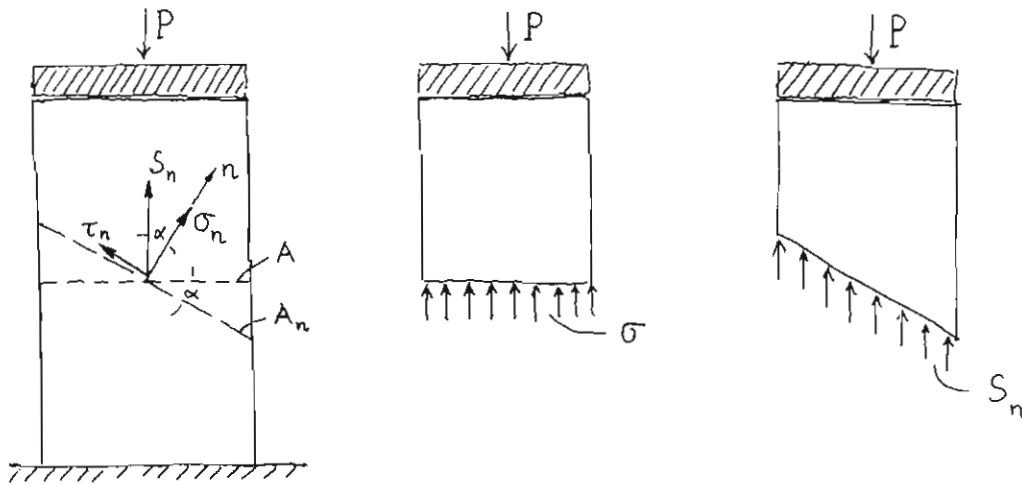
$$\Phi_t = f_d \Phi_n \quad f_d : \text{coeff. di attrito dinamico.}$$

Si ha:

$$f_d < f_s$$

Saggio del 1773. È merito fondamentale di Coulomb l'aver scoperto la "seconda dimensione" della tensione: oltre alla tensione "normale" σ precedentemente studiata nella teoria delle travi presso o teso inflesse, esiste la tensione "tangenziale" τ , ritenuta da Coulomb principale responsabile della rottura. Vediamo brevemente l'analisi svolta da Coulomb sul pilastro compresso.

61



Studiamo lo stato di tensione che si manifesta su una sezione non perpendicolare all'asse della colonna. Se A è l'area della sezione trasversale, l'area A_n è data da:

$$A_n = \frac{A}{\cos \alpha}$$

La tensione S_n operante su A_n è, per l'equilibrio:

$$S_n = -\frac{P}{A_n} = -\frac{P}{A} \cos \alpha = \sigma \cos \alpha$$

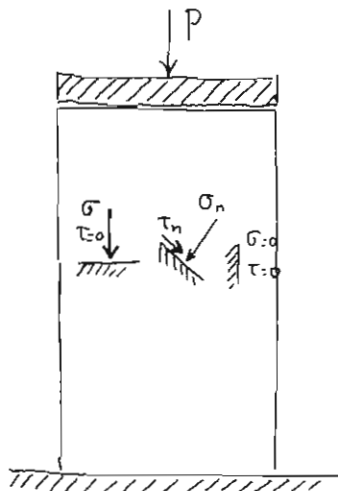
Dove:

$$\sigma = -\frac{P}{A} \quad (\text{negativa perché di compressione})$$

rappresenta la tensione su A .

Decomponiamo S_n nella componente normale σ_n e nella componente tangenziale τ_n :

$$\begin{cases} \sigma_n = S_n \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \\ \tau_n = S_n \sin \alpha = \sigma \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$



Osserviamo quindi che:

per $\alpha = 0 \rightarrow |\sigma_n|$ prende il valore massimo ed è:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma \\ \tau_n = 0 \end{cases}$$

per $\alpha = \frac{\pi}{2} \rightarrow |\sigma_n|$ prende il valore minimo ed è

$$\begin{cases} \sigma_n = 0 \\ \tau_n = 0 \end{cases}$$

per $\alpha = \frac{\pi}{4} \rightarrow |\tau_n|$ prende il valore massimo ed è:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma}{2} \\ \tau_n = \frac{\sigma}{2} \end{cases}$$

Pertanto, al variare di α , varia la determinazione di σ_n e di τ_n .

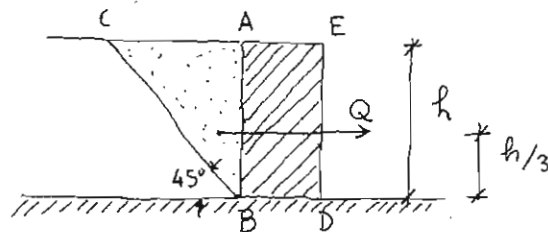
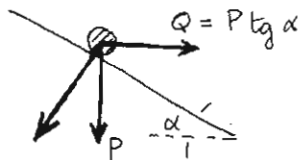
Secondo Coulomb la tensione tangenziale è responsabile della rottura: è allora prevedibile che le sezioni inclinate di 45° sono quelle in cui si manifesteranno i primi segni di rottura.

Una conferma sperimentale si ha per i materiali a rottura "fragile" (ad es. materiali lapidei).



Nella stessa memoria del 1743 è affrontato il problema del muro di sostegno: anche in questo caso è fondamentale, nella valutazione della spinta della terra, l'azione tangenziale.

Del problema si era occupato già Belidor (1729) il quale era ricorso all'immagine del piano inclinato.



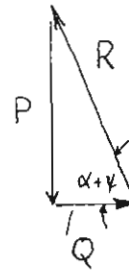
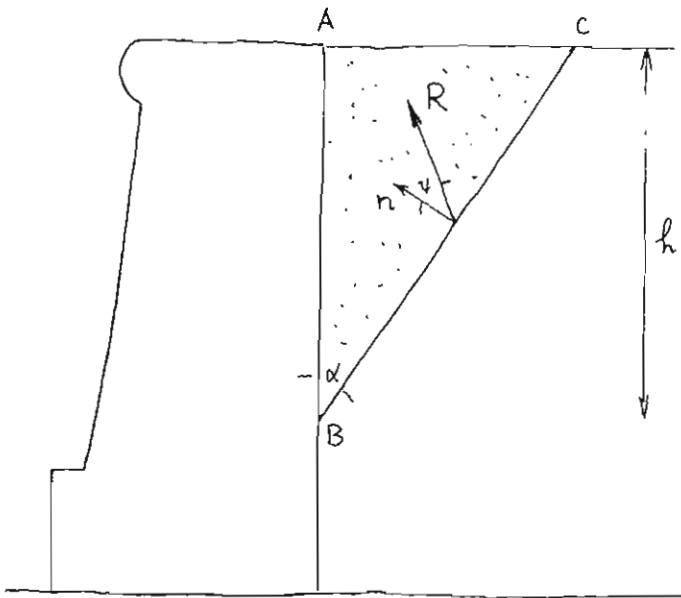
Egli suppone che il prisma ABC eserciti la spinta orizzontale Q sul muro ABDE: ciò corrisponde al ritenere che il piano di "naturale declivio" del terreno (piano la cui traccia è BC) sia inclinato di 45° . Il peso del prisma ABC è $\gamma \frac{b \cdot h^2}{2}$, dove γ è il peso specifico del terreno, b la profondità del muro, h l'altezza. Assumendo un coefficiente di riduzione pari a $1/2$ per l'attrito su BC, Belidor ottiene il valore della spinta risultante:

$$Q = \frac{\gamma b h^2}{4}$$

Posto Q in corrispondenza di $H/3$, egli ottiene la seguente valutazione del "momento ribaltante"

$$M_r = \gamma \frac{b h^3}{12}$$

da cui seguono dimensionamenti del muro in accordo con quelli in pratica al suo tempo.



Coulomb riprende il problema.
Egli considera una porzione di terra
spingente su AB, slittante su BC.
Trascurando l'attrito su AB la

reazione Q del muro è orizzontale. Il peso P del prisma ABC è:

$$P = \frac{1}{2} \gamma b h^2 \operatorname{tg} \alpha$$

La risultante delle reazioni lungo il piano di slittamento BC forma un
angolo di attrito ψ con la normale n al piano BA.

Dunque:

$$\begin{aligned} Q &= P \operatorname{cotg}(\alpha + \psi) = \frac{\gamma b h^2}{2} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg}(\alpha + \psi) = \\ &= \frac{1}{2} \gamma b h^2 \frac{1 - f_s \operatorname{tg} \alpha}{1 + f_s \operatorname{cotg} \alpha} \end{aligned}$$

dove $f_s = \operatorname{tg} \psi = \text{coff. di attrito}$.

A questo punto Coulomb sceglie α in modo che Q sia massimo: ottiene

$$\operatorname{tg} \alpha = -f_s + \sqrt{1 + f_s^2} \quad (*)$$

Questa formula è stata ulteriormente elaborata da:

Prony (1755-1839). Nato a Lyons, entra nella scuola des Ponts et Chaussées. Dal 1780 lavora con Perronet al ponte di Neuilly; nel 1785 assiste Perronet nella costruzione del porto di Dunkirk. Membro della commissione pesi e misure della Rivoluzione è uno dei fondatori della École Polytechnique (1794). Nel 1798 diventa direttore della École des Ponts et Chaussées.

Egli dimostra che la (*) corrisponde alla determinazione:

$$\alpha = \frac{1}{2} (90 - \psi)$$

Questa formula consente lo sviluppo di metodi pratici per il calcolo dei muri di sostegno.

3. LA SISTEMAZIONE DELLA MECCANICA CLASSICA.

CENNO SULL'EVOLUZIONE DEI PRINCIPI DI ESTREMO.

3.1. Galileo, Cartesio.

Abbiamo già menzionato il contributo importante dato da Galileo alla meccanica generale, con la formulazione del principio di inerzia. Nei "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze..." del 1638, vien appunto affermato che un mobile lanciato su un piano orizzontale in assenza di ogni ostacolo ha moto indefinitamente uniforme.

L'importazione di Galileo è già aperta agli sviluppi newtoniani. Tuttavia essa tardò ad affermarsi. Un esempio significativo dell'opposizione incontrata è leggibile nel pensiero meccanico di Cartesio (1596-1650). In una lettera a p. Mersemne, Cartesio riafferma il ruolo centrale del principio dei lavori virtuali che aveva governato la meccanica antica e medievale: "l'invenzione di tutte le macchine semplici deriva dal solo principio che la stessa "forza" che può elevare un peso di 100 libbre di un piede, può elevare un peso di 200 libbre di mezzo piede... E questo principio non può essere rifiutato se si considera che l'effetto deve essere sempre proporzionato alla causa". Parlando di Galileo, Cartesio nega la superiorità della concezione galileiana: "Galileo - egli dice -, parlando della bilancia e della leva, spiega molto bene il quod ita fit, ma non il cur ita fit, come io faccio col mio principio."

Merito di Cartesio è l'aver intuito il teorema della conservazione della quantità di moto (1629) in un sistema "isolato" non soggetto cioè a forze esterne. Lo stesso teorema emerse per varie vie nella discussione promossa dalla Royal Society di Londra nel 1668 intorno alle leggi dell'urto (vi parteciparono, come si è già detto, Wallis, Wren, Huyghens, Hooke).

3.2. Isacco Newton (1642-1727) : " *Philosophiæ naturalis principia mathematica* " (1687).

Il ruolo di Newton è fondamentale sia dal punto di vista metodologico, sia da quello della formulazione dei principi sperimentali. Qui ci limiteremo a ricordare le tre celebri leggi del moto che stanno alla base della meccanica classica :

1) "Ogni corpo persevera nel suo stato di riposo o di moto rettilineo uniforme, a meno che qualche forza non agisca su di esso e non lo costringa a cambiar stato"

2) "I cambiamenti della quantità di moto sono proporzionali alla forza motrice e si svolgono nella sua direzione"

3) "L'azione è sempre uguale e opposta alla reazione, ossia le azioni di due corpi, l'uno sull'altro, sono sempre uguali e contrarie"

Come è noto, la seconda legge può scriversi in formole :

$$F = m a$$

m = massa

a = accelerazione

F = forza

o, più in generale,

$$F = \frac{d}{dt}(mv)$$

v : velocità

(*)

Il prodotto mv prende il nome di quantità di moto. La legge di Cartesio discende quindi dalla (*) quando si supponga $F = 0$.

3.3. Goffredo Guglielmo Leibniz (1646-1716)

Contemporaneo di Newton, Leibniz si è occupato anche di meccanica contestando polemicamente - e in modo non completamente corretto - la tesi di Cartesio sulla conservazione della quantità di moto (" Courte démonstration d'une erreur mémorable de Descartes et d'autres savants, touchant la prétendue loi naturelle en vertu de laquelle Dieu conserverait toujours la même quantité de mouvement, loi dont ils font un usage fautif même en mécanique" 1686).

e proponendo, quale legge fondamentale della meccanica quella relazione che è oggi nota come teorema delle forze vive.

Egli distingue appunto ("Specimen dynamicum" 1645) la forza morta (causa del movimento non ancora avviato) dalla forza viva ("la forza ordinaria, unita al movimento attuale"). Afferma quindi che "la forza viva nasce da un'infinità di impressioni continuate della forza morta". In formule, avendo misurato la forza viva come $\frac{1}{2}mv^2$, si ha dunque:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = F ds \quad (s: \text{spazio percorso...})$$

e, integrando tra due istanti t_1, t_2 :

$$\frac{1}{2}mv^2(t_2) - \frac{1}{2}mv^2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} F ds$$

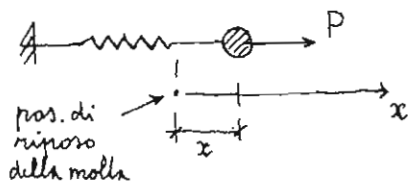
3.4. 4 principi di estremo

Per intendere l'evoluzione e il progressivo chiarimento dei principi della meccanica, non si può prescindere dal dibattito sorto in relazione al principio della minima azione. La premessa di tale principio si ritrova nell'ambito dell'ottica. Fermat (in una lettera a C. de la Chambre del 1.1.1662) fornisce una dimostrazione delle leggi sulla riflessione e sulla rifrazione della luce (già scoperte da Cartesio) partendo da un principio teleonomico: "la nature agit toujours par les voies les plus courtes". Il principio di Fermat si precisa così: "il cammino percorso dalla luce tra i punti A e B attraverso un numero qualunque di riflessioni e rifrazioni è quello per cui il tempo di percorrenza è minimo".

Ne seguì una polemica con i seguaci di Cartesio: ad es. Descartes (in una lettera a Fermat del 6.5.1662) si opponeva alla visione finalistica della natura implicita nel principio sopra riportato, nei seguenti termini: "un principio morale e non fisico non è affatto e non può essere causa di alcun effetto nella natura".

Nella meccanica, l'introduzione di un principio teleonomico è dovuta a P.L. Moreau de Maupertuis. Già nel 1740, in una memoria presentata alla Académie des Sciences egli aveva formulato la tesi che l'equilibrio di un sistema elastico può essere descritto imponendo condizioni di max o di min. su una funzione potenziale.

Ad es., la condizione di equilibrio per il sistema rappresentato in figura, ossia la:



$$P - Kx = 0 \rightarrow x = \frac{P}{K} \quad (\Delta)$$

può essere ottenuta imponendo che, nella posizione di equilibrio, la funzione potenziale:

$$\Pi = \frac{1}{2} K x^2 - P x$$

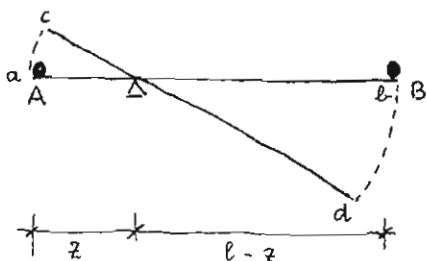
abbia il suo valore minimo. Infatti risulta:

$$\frac{d\Pi}{dx} = 0 \rightarrow Kx - P = 0$$

ossia la (Δ) .

Fu però nel 1744 ("Accord de différentes lois de la Nature qui avoient jusqu'ici paru incompatibles", Mém. Ac. Sciences) che Maupertuis avanzò la tesi di una estensione e una generalizzazione del principio finalistico di Fermat alla fisica e quindi alla meccanica. "Le principe général, qui s'étend aux uns et aux autres (cioè ai corpi elastici e ai corpi rigidi) est que la quantité d'action nécessaire pour causer quelque changement dans la Nature est la plus petite qu'il est possible".

Ad es., definita, in campo meccanico, la quantità d'azione in termini di proporzionalità al prodotto spazio \times velocità, Maupertuis dimostra l'efficacia del suo principio nella deduzione delle equazioni cardinali della statica. Con riferimento alla leva della figura



accanto, risulta che l'azione è proporzionale alla quantità:

$$A \cdot \widehat{ac}^2 + B \cdot \widehat{bd}^2$$

(infatti lo "spazio" percorso è proporzionale a sua volta alla velocità con cui è percorso).

La condizione:

$$\text{Azione} = \min$$

fornisce allora:

$$A z^2 + B(l-z)^2 = \min$$

da cui:

$$2Az - 2B(l-z) = 0$$

Questa relazione corrisponde all'usuale condizione di equilibrio alla rotazione.

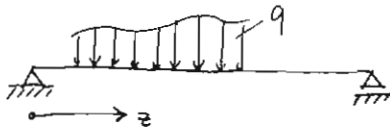
Purtroppo, il Maupertuis, nell'elaborazione della sua teoria così feconda di conseguenze importanti per la meccanica strutturale (vedremo in seguito un riscontro di essa nel principio di Menabrea (1858)) non seppe astenersi da divagazioni metafisiche e teologiche; esse favorirono l'inasprirsi di una lunga ed aspra polemica, cui misero mano König e Voltaire.

Eulero, legato da amicizia nei confronti di Maupertuis, prese le difese del principio teleonomico, sia nel saggio del 1744 ("Methodus inveniendi lineas curvas..."), sia in un saggio apposito del 1753 ("Dissertation sur le principe de la moindre action, avec l'examen des objections de M. le Prof. König faites contre ce principe"). È da rilevare che Eulero, pur essendo consapevole dei risvolti finalistici (1), si rifiutò di addentrarsi in dispute filosofiche (egli dice "quod negotium aliis, qui metaphysicam profitentur, relinquo"), ed offerì invece una solida base scientifica al metodo proposto da Maupertuis, ponendo le premesse del moderno calcolo variazionale.

(1) " Poiché la fabbrica dell'universo è la più perfetta ed è l'opera del più saggio Creatore, nulla di ciò che si verifica nell'universo non è in relazione con qualche condizione di massimo o di minimo. Quindi non c'è alcun dubbio che ogni effetto nell'universo può essere spiegato dalle cause finali, con l'aiuto del metodo dei massimi e minimi, così come anche dalle cause efficienti".

3.5. Un' applicazione importante.

Illustriamo ora, sul semplice esempio della trave elastica inflessa, la possibilità di ricondurre l'equazione differenziale della linea elastica alle condizioni di minimo (o, più in generale, di estremo) per un funzionale espresso in termini dell'energia potenziale totale.



Per la trave vale, come è noto, l'equazione:

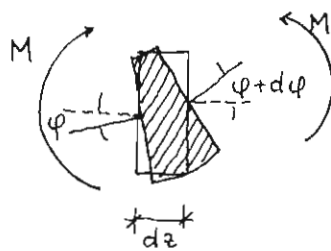
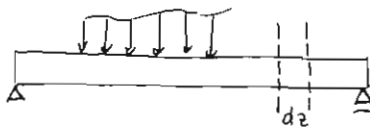
$$(EJ v''')' = q$$

Cui vanno associate le condizioni ai limiti:

$$\text{per } z=0 : v(0) = 0 \quad EJ v''(0) = 0$$

$$\text{per } z=l : v(l) = 0 \quad EJ v''(l) = 0$$

Orbene, consideriamo l'espressione dell'energia potenziale totale: essa è composta di due contributi. Il primo contributo è costituito



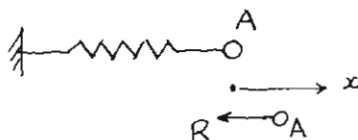
dal lavoro "interno" compiuto dal momento flettente nella deformazione⁽¹⁾; per ogni elemento di trave dz tale lavoro (infinitesimo) è:

$$\begin{aligned} dL_i &= \frac{1}{2} (-M\varphi + M(\varphi + d\varphi)) = \\ &= \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{1}{2} M \frac{d\varphi}{dz} dz = \frac{1}{2} M \kappa dz \quad (0) \end{aligned}$$

Il secondo contributo è costituito dal lavoro "esterno". Per ogni elemento dz la forza infinitesima q dz agente su dz per lo spostamento v(z) compie il lavoro:

$$dL_e = q v dz$$

(1) Nel caso del sistema elastico elementare già considerato, l'energia elastica



è misurata dal lavoro compiuto dalla forza reattiva R della molla (cambiato di segno), quando A si sposta di x dalla posizione di riposo: essendo $R = -kx$ risulta:

$L = \int_0^x -R dx = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$. In modo analogo si giustifica il coeff. $\frac{1}{2}$ che figura nella (0).

Definiamo ora l'energia potenziale totale \mathcal{E} secondo la :

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} M \kappa - q v \right) dz$$

Essa può essere scritta in funzione dello spostamento $v(z)$, tenendo conto che $\kappa = -\frac{d^2 v}{dz^2}$ e che $M = -EJ \frac{d^2 v}{dz^2}$, nella forma :

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EJ v''^2 - q v \right) dz \quad (\Delta)$$

Nella (Δ), ad ogni determinazione della funzione spostamento $v(z)$ è associato un numero reale espressivo dell'energia potenziale totale.

Ci proponiamo di valutare per quale determinazione di $v(z)$, \mathcal{E} assume il valor minimo. A questo scopo supponiamo di conoscere tale determinazione : sia $v_0(z)$; e consideriamo una generica altra determinazione di $v(z)$, "prossima" a $v_0(z)$, del tipo :

$$v(z) = v_0(z) + \varepsilon \phi(z)$$

con :

ε costante reale $\ll 1$

$\phi(z)$ funz. arbitraria continua e derivabile quanto occorre, rispettosa delle condizioni al contorno.

Porto :

$$\mathcal{E}(\varepsilon) = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} EJ [(v_0 + \varepsilon \phi)']^2 - q(v_0 + \varepsilon \phi) \right\} dz$$

se è vero che \mathcal{E} prende il valor minimo per $v = v_0$, ossia per $\varepsilon = 0$, dovrà essere :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0 \quad \text{per } \varepsilon = 0$$

Ciò implica :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = \int_0^l (EJ v_0'' \phi'' - q \phi) dz = 0$$

Integriamo ora per parti il primo termine sotto integrale :

$$EJ v_0'' \phi' \Big|_0^l - \int_0^l [(EJ v_0'')' \phi' + q \phi] dz = 0$$

E ancora :

$$EJ v_0'' \phi' \Big|_0^l - (EJ v_0'')' \phi \Big|_0^l + \int_0^l [(EJ v_0'')'' \phi - q \phi] dz = 0$$

Poiché $v_0(z)$, $\phi(z)$ soddisfano le condizioni al contorno, questa relazione si riconduce a:

$$\int_0^l [(EJ v_0'')'' - q] \phi \, dz = 0$$

Un noto teorema assicura allora, per l'arbitrarietà di $\phi(z)$, che deve essere:

$$(EJ v_0'')'' = q$$

Si è così ottenuto questo importante risultato: la funzione $v_0(z)$ che rende minimo \mathcal{E} nella classe degli spostamenti ammissibili è determinata dalla equazione differenziale della linea elastica, la quale pertanto può essere intesa come "euleriana" del problema variazionale:

$$\mathcal{E} = \int_0^l \left(\frac{1}{2} EJ v''^2 - p v \right) dz = \min \quad (*)$$

Dal punto di vista applicativo, questo risultato può essere utilizzato efficacemente, adottando procedimenti diretti approssimati nel calcolo della $v(z)$ che rende minimo \mathcal{E} . Basti un cenno: la funzione incognita $v(z)$ può essere rappresentata così:

$$v(z) = a_1 v_1(z) + a_2 v_2(z) + \dots + a_N v_N(z) \quad (**)$$

dove $v_1(z), v_2(z), \dots$ sono funzioni note (...) rispettose delle condizioni al contorno, e a_1, a_2, \dots, a_N sono costanti incognite. Sostituendo la (**) in (*) si otterrà:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_1, a_2, \dots, a_N) = \min$$

La determinazione migliore di a_1, a_2, \dots, a_N è allora ottenuta dalle condizioni:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Esse costituiscono un sistema di N eq. lineari in a_1, a_2, \dots, a_N la cui soluzione risponde in via approssimata al problema.

Questo metodo, opportunamente precisato e sviluppato, è fondamentale per la soluzione di numerosi complessi problemi strutturali, ed ha assunto oggi un ruolo sempre più rilevante nella formulazione di programmi per il calcolo automatico (finite-elements methods).

3.6. Seconda metà del secolo XVIII.

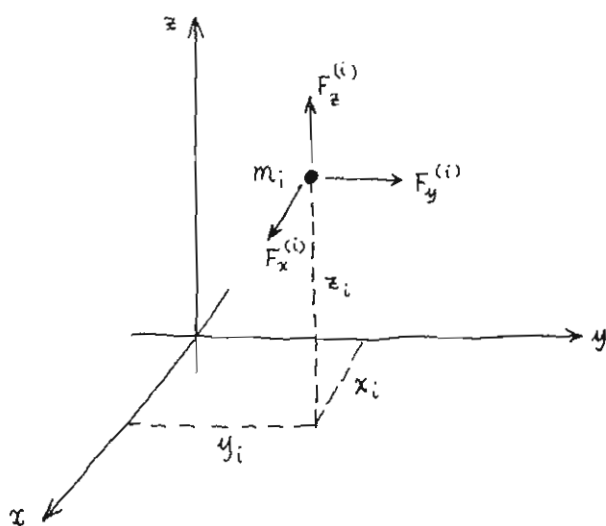
Nella seconda metà del secolo XVIII la meccanica consegue gradualmente una solida sistemazione rigorosamente razionale. Essa diventa un prototipo perfetto di scienza saldamente fondata, a un tempo, sulla verifica sperimentale e sulla deduzione matematica da principi assolutamente generali. Questa concordanza tra il momento deduttivo e il momento induttivo, ovvero tra l'importazione "razionalistica" e quella "empiristica", suscitò ampie discussioni sulla natura dei principi fondamentali della meccanica. L'Accademia di Berlino pose a concorso la questione "se le leggi della statica e della meccanica fossero di verità necessaria o contingente". Emersero pareri discordi: J. Bernoulli optò per una tesi di stampo empiristico; L. Eulero per una tesi razionalistica, affermando che la legge

$$F = \frac{d}{dt}(mv), \quad (*)$$

legata forse al principio di ragion sufficiente, appartiene alle verità di ragione.

Interesante la posizione di Giovanni D'Alembert (1717-1783), il quale, pur collocando la meccanica fra le scienze razionali, come la geometria, ritiene che la legge (*) possa essere interpretata come definizione di forza e si imponga quindi come presupposto necessario e indimostrabile ma privo di implicazioni metafisiche. E' in questo clima culturale che maturò il dibattito epistemologico risolto storicamente con la concezione della scienza implicita nel sistema filosofico kantiano.

A D'Alembert si deve un notevole passo avanti nella via segnata dal proposito metodologico da lui accolto: "étendre les principes en les réduisant". In una lettera all'Accademia delle Scienze del 1742 egli afferma: "Il principio dell'equilibrio congiunto a quelli della forza di inerzia e del movimento composto ci conduce alla soluzione di tutti i problemi in cui si considera il movimento di un corpo".



In termini analitici, il principio di D'Alembert, applicato ad un sistema meccanico costituito da n particelle materiali, prende la forma:

$$\sum_{i=1}^n \left[(F_x^{(i)} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_y^{(i)} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_z^{(i)} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i \right] = 0 \quad (*)$$

dove $\ddot{x}_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2}$ è la componente dell'accelerazione secondo l'asse x per la particella i , etc. Come si può osservare, si tratta di una estensione al caso dinamico del principio dei lavori virtuali già acquisito in statica.

Luigi di Lagrange (nato a Torino nel 1736, collaboratore di Eulero nell'Accademia di Berlino; dal 1787 a Parigi dove inaugura nella École Polytechnique l'insegnamento dell'Analisi; morto nel 1813), sulla base di questo principio, porta a compimento la traduzione analitica della meccanica. La sua opera fondamentale, "Mécanique analytique" (1788) persegue un obiettivo di completa matematizzazione della meccanica.

Nella introduzione si legge: "On ne trouvera point de figures dans cet Ouvrage (...) Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine".

E infatti, partendo da (*), Lagrange dimostra come i diversi principi meccanici storicamente introdotti da Huyghens, Leibniz, Newton, Maupertuis, Bernoulli, Eulero, possano essere ricadotti ad unità nell'ambito di un rigoroso discorso deduttivo.

Infine, con W.R. Hamilton (Phil. Trans. of the Roy. Soc. 1834-35) e Jacobi (Journal de Crelle XVII, Vorlesungen über Dynamik 1842-43), la formulazione variazionale della meccanica procedente dalle intuizioni di Maupertuis e di Eulero, ma spogliata dalle ambizioni filosofiche che ne avevano favorito la nascita, consegue un alto grado di formalizzazione, fornendo, tra l'altro, gli strumenti concettuali che, nel nostro secolo, favoriranno lo sviluppo della meccanica ondulatoria.

4. MUTAMENTI NELLA TECNICA DELLE COSTRUZIONI
DURANTE LA RIVOLUZIONE INDUSTRIALE.
PROGRESSI DELLE COSTRUZIONI NEL SECOLO XIX.

Per una introduzione al tema di questo capitolo si consiglia la lettura dei seguenti testi:

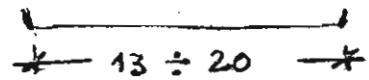
- 1) G. Albenga, Le strade e i ponti in: "Storia della Tecnica dal Medioevo ai nostri giorni" di A. Uccelli, Milano. (1945)
- 2) G. Albenga, I progressi nelle costruzioni in: "L' Europa nel Secolo XIX" di D. Donati e F. Carli, Padova. (1932)
- 3) G. Albenga, I Ponti - la pratica. UTET, Torino. (1954)
- 4) S. Giedion, Spazio tempo e architettura, Milano (1954).
- 5) L. Benevolo, Storia dell' architettura moderna (vol.1), Bari (1960).
- 6) A. Capocaccia, Mondini, Forti, Storia della tecnica, Vol 1 e 2 UTET Torino (1974).
- 7) S. P. Timoshenko, History of strength of materials, McGraw Hill New York (1953).

Una traccia degli argomenti considerati può essere seguita utilizzando i seguenti schizzi sintetici illustrati a lezione.

PERFEZIONAMENTO DEI SISTEMI TRADIZIONALI

Viabilità -

FRANCIA - Regolamento di COLBERT



dal 1720 - allineamento rettilineo.

fine secolo: P.M.J. Trésaguet

INGHILTERRA - 1745 turnpike acts

J. Metcalf dal 1765 + di 180 MI

J. Brindley (canale navigabile per il duca di Bridgewater)

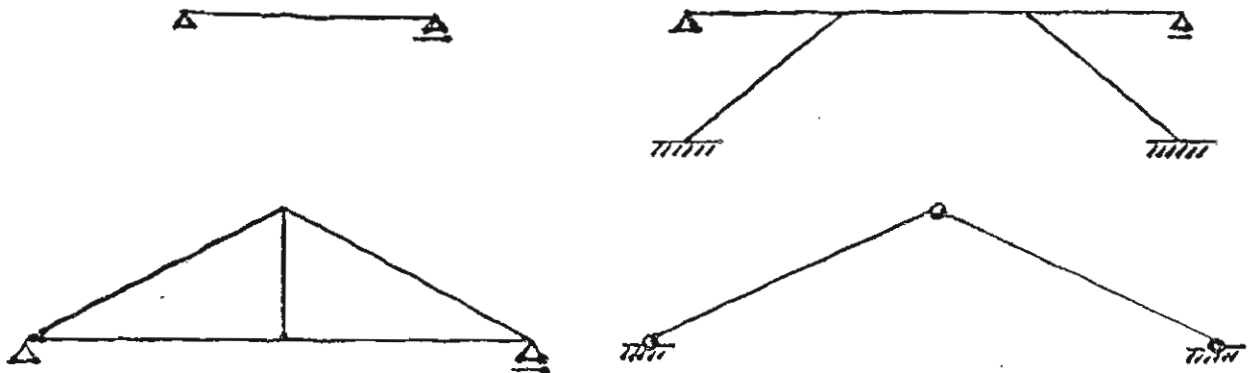
T. Telford

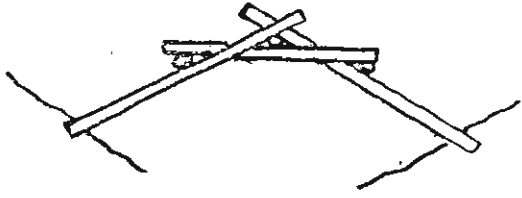
J. Macadam

1791. Monge (calcolo dei trasporti di terra)

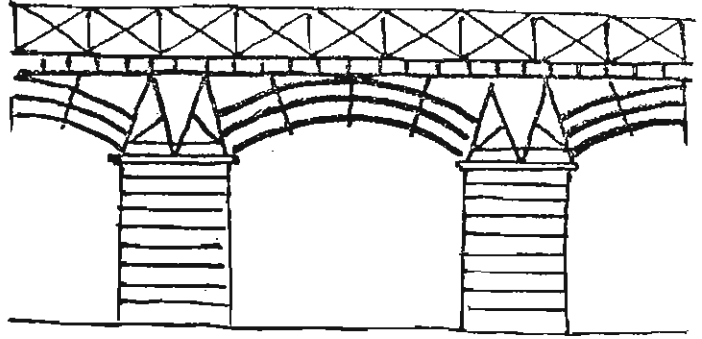
Ponti -

→ '500 l'uso del legno limitato a schemi elementari:



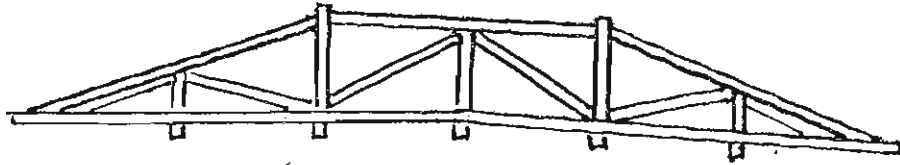


Passerella dei
pionieri germanici

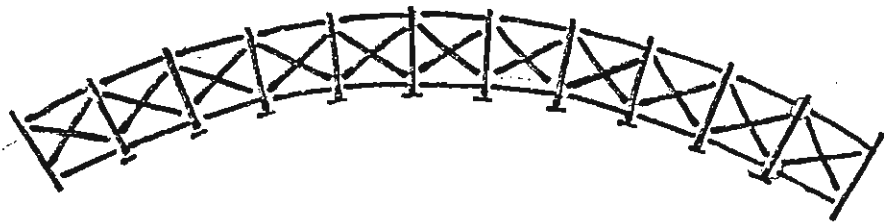


Ponte di Traiano sul
Danubio (Apollodoro)

Ponti "reticolari" di Palladio



(Sull'Adige, vicino a)
Trento



Centine per il ponte di S. Trinita di B. Ammannati.

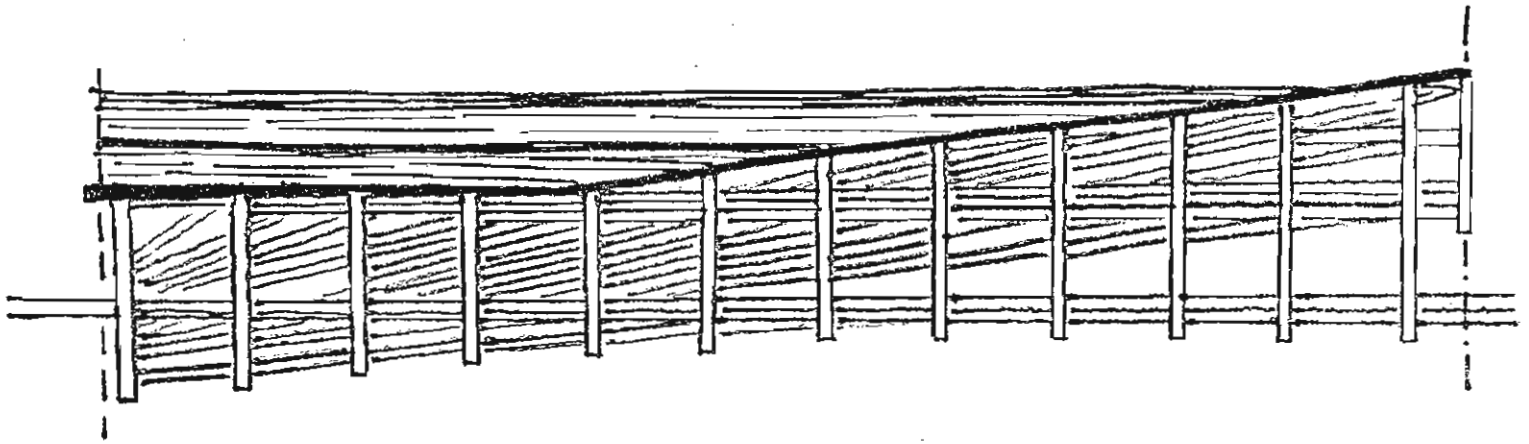


S. U. GRUBEMANN :

ponte sul Reno a Sciaffusa (59 m)

ponte sulla Limmat di Wettingen (1777-78)

(distrutto in guerra nel 1799)



In America :

1804 : ponte sullo Schuylkill presso Filadelfia (104 m)

Burr : ponte di Trenton sul Delaware

1808 Wehking : ponte sul Regnitz a Bamberg

In Francia :

École des Ponts et Chaussées 1747

Sviluppo alla costruzione in pietra da taglio

J. R. PERRONET (dir dell' E.P.Ch. dal 1747)

- ponte di Neuilly (1768-71)

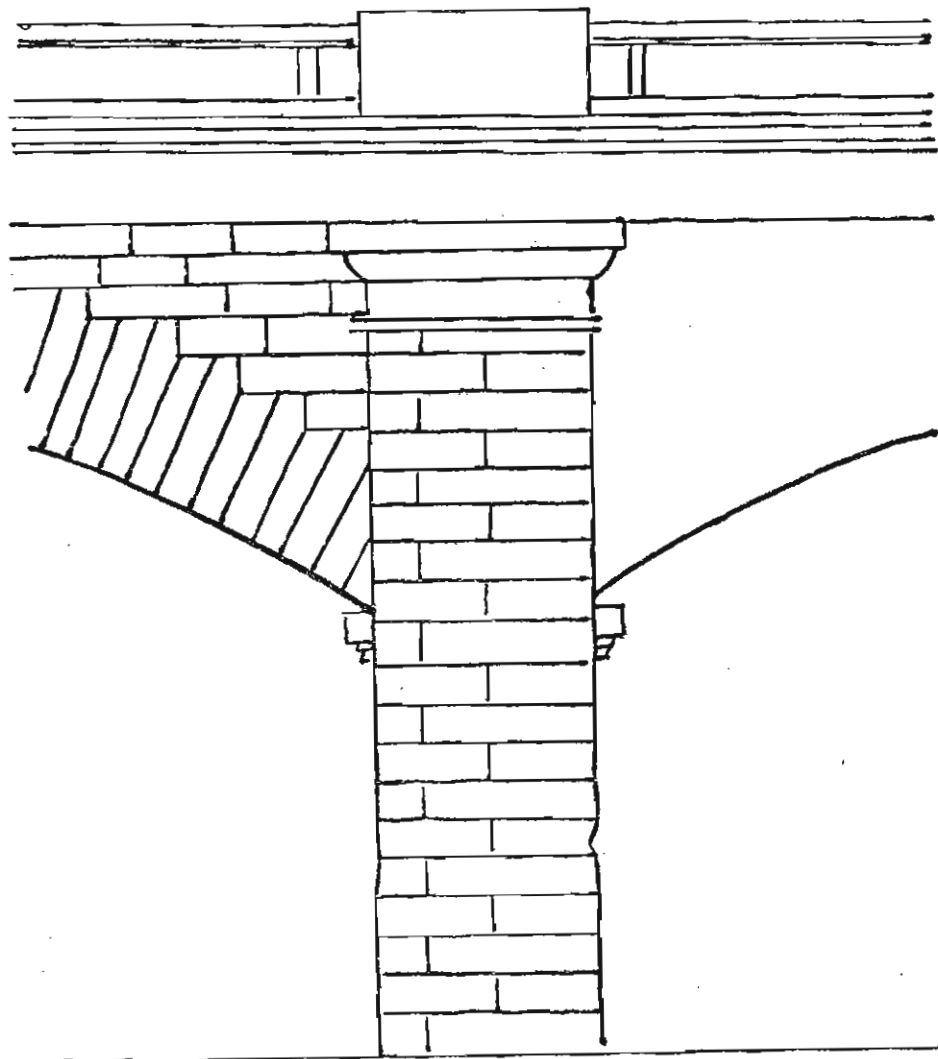
- ponte della Concordia

- Canale della Borgogna

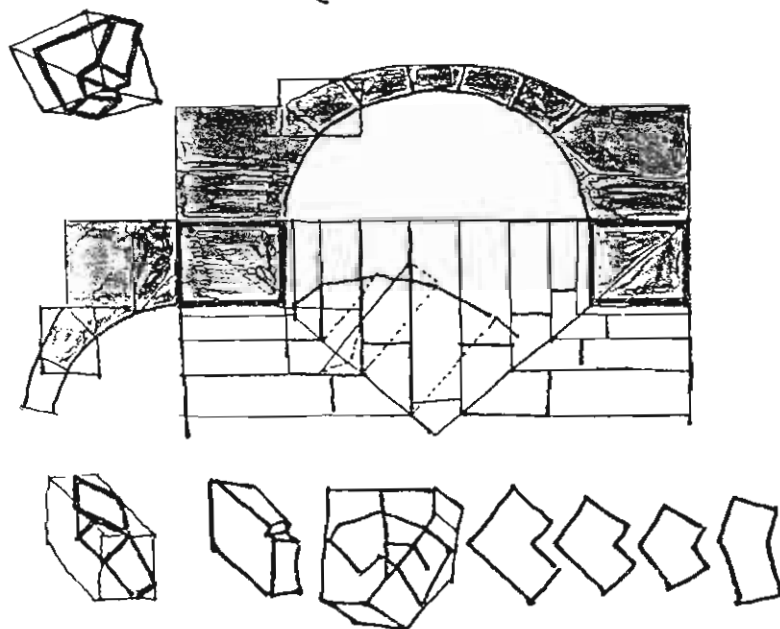
- parte delle fognature di Parigi.

Innovazioni : - arco ribassato, pile di dim. rid.

RONDELET : stereotomia



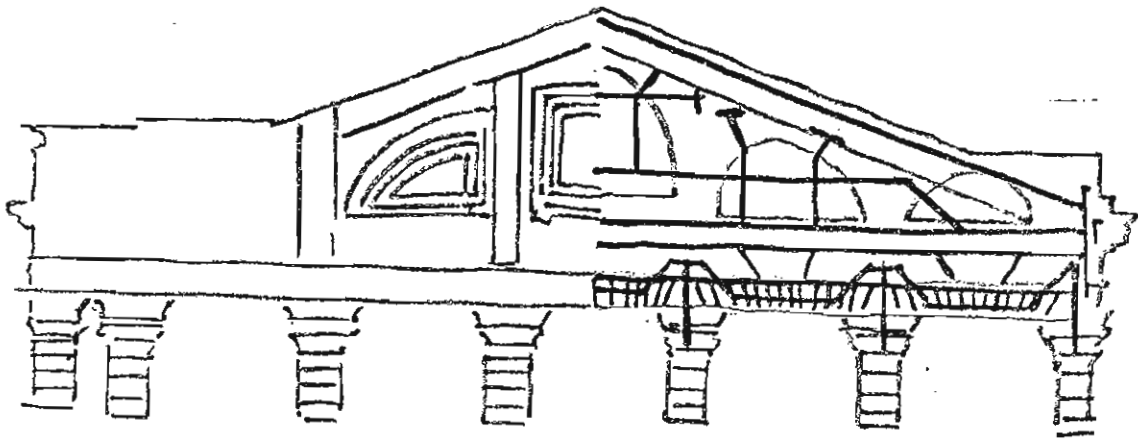
Ponte della Concordia
(PERRONET)



I NUOVI MATERIALI

Prima il ferro usato per catene, tiranti, collegamenti tra pietre da taglio.

Es: (Rondelet 1770)

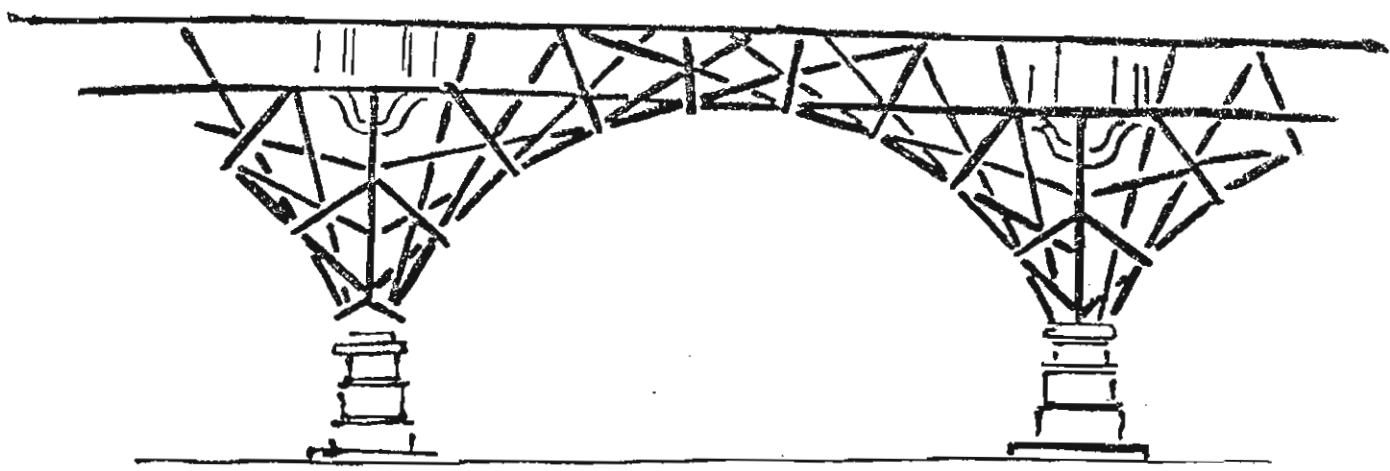


S. Geneviève (Soufflot 1755)

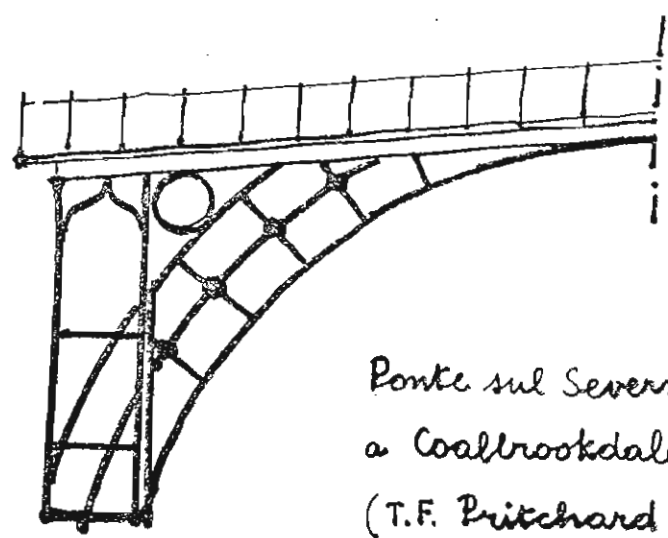
1786. Victor Louis : volta in ferro per il teatro di Bordeaux

Progressi nelle tecnologie del ferro.

- primi 700 : Abramo Darby (Coallbrookdale) : coke
- 1740 : Huntsmann (orologio a Sheffield)
- metà 700 : J. Wilkinson (Broseley) : con Boulton Watt ; †18
- ↓
- 1777-79 : 1° ponte in Ferro sul Severn presso Coallbrookdale (arch. T.F. Bitchard ; officine dei Darby)
- 1786 : Tom Paine disegna un ponte in ghisa per il fiume Schuylkill -
- I perni rilevati da Rowland Burdon →
- ponte di Sunderland sullo Wear (236 ft)

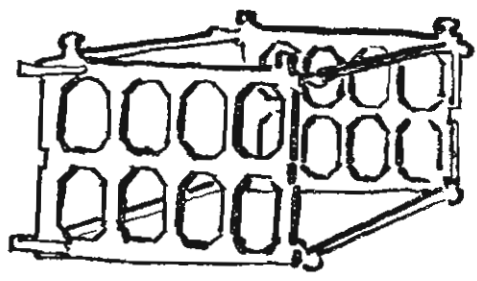


Ponte di Westminster 1738

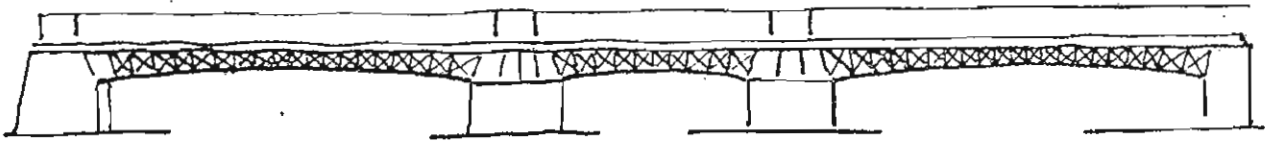


Ponte sul Severn
a Coalbrookdale
(T.F. Pritchard 1777)
100 ft

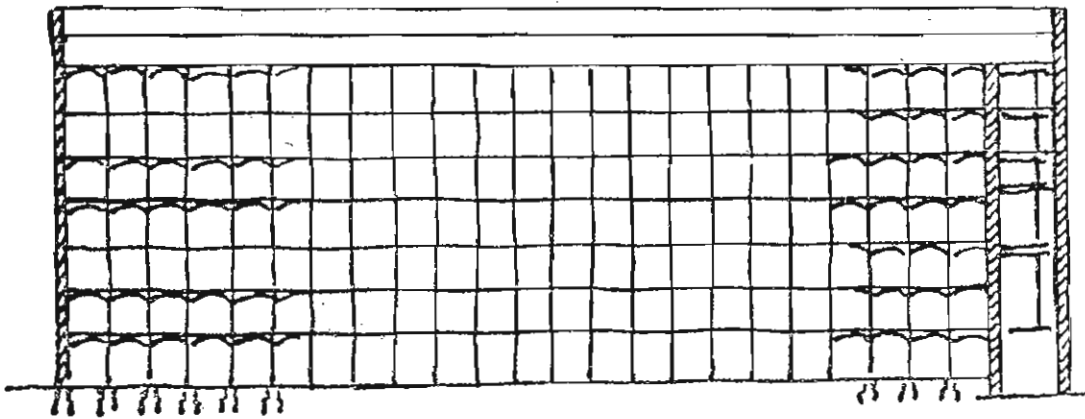
Tecnica proposta da
Tom Paine e da
Telford



Conci in ghisa del ponte
Austerlitz sulla Senna
a Parigi (Lamande):
imitazione del ponte di
Sunderland di R. Burdon.



Progetto per la Marschallbrücke (Berlino; 1818)
(K.F. Schinkel)

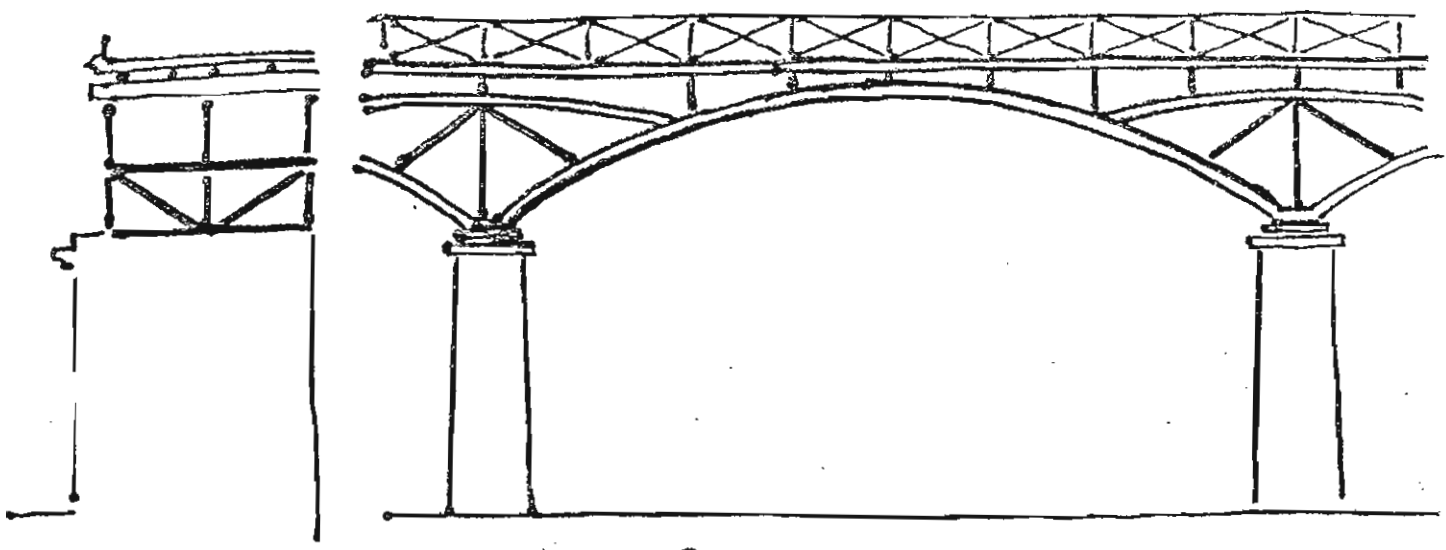


Boulton & Watt : progetto di filanda di Cotone
a Manchester (1801)

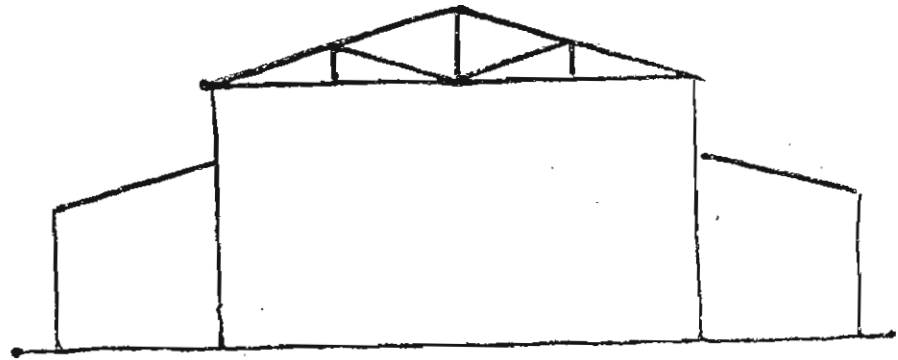
Nash : 1818 , struttura in ghisa per il padiglione
reale di Brighton

Francia.

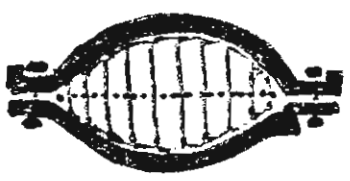
- De Cessart et Dillon : 1801-1803 Pont des Arts
- F.J. Bélanger : 1811 Cupola circolare della
Halle du Blé (Parigi)
- Vignon : 1824 Copertura del mercato della
Madeleine
- Lenoir : 1830 baracche in ferro
- Polonceau : 1833 ponte in ghisa del Carrousel
1833 introdurre la sua capriata



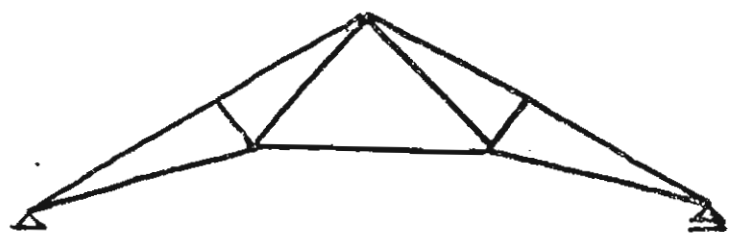
Pont des Arts



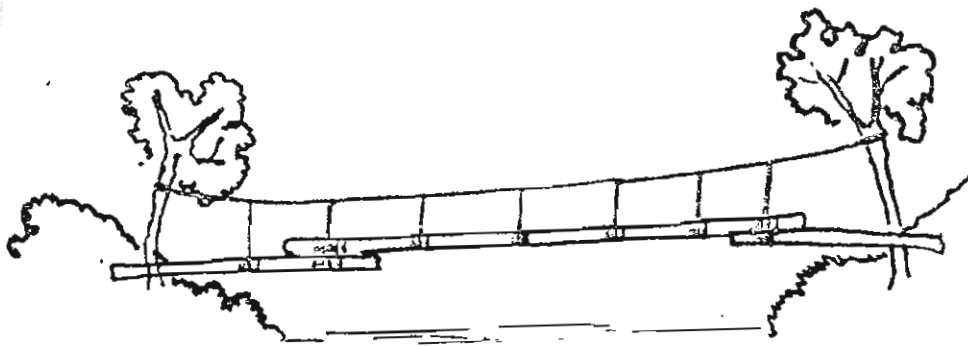
Mercato coperto della
Madeleine



Sezione dell'arco del Carrousel

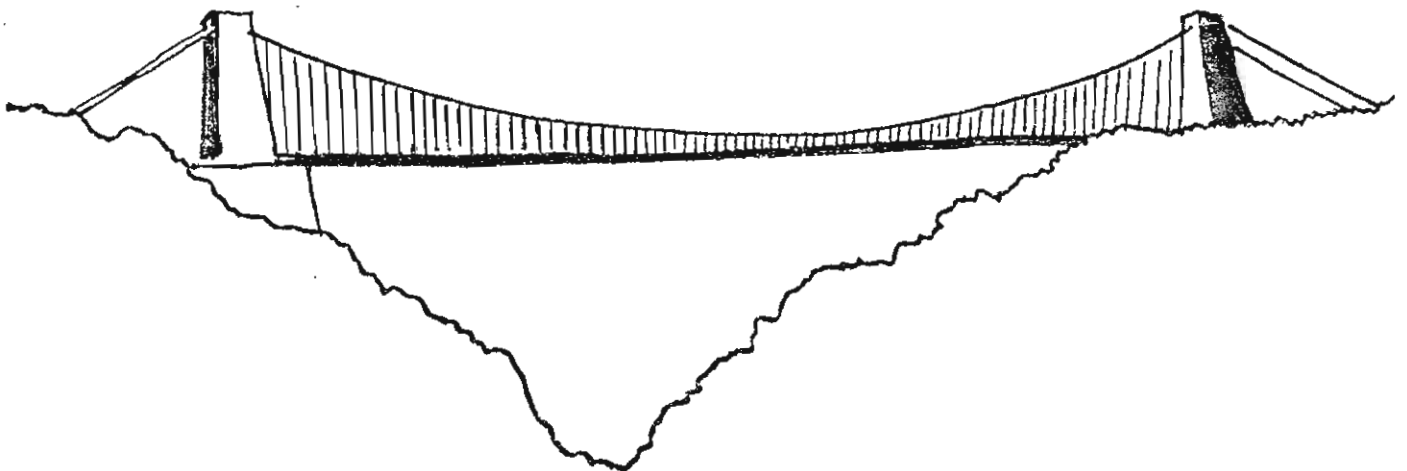


Capriata Poloncean



Passerelle usuali nel Caucaso

1741. Passerella pedonale sul fiume Tees (70 ft)
- ~ 1790. Altre passerelle in America
1813. S. Brown (cap. di marina): ponte sul Tweed (110 ft)
prototipo europeo.
- 1818-26 T. Telford: ponte sul Menai 176 m; Sal Conway -
- 1823 L. Navier: il pont des Invalides. (demolito)
- dopo il 1825: M. Séguin: fonda un'impresa che costruisce più
di 80 ponti sospesi in Francia
- 1834: Charley: ponte sulla Sarine a Friburgo: 273 m, il
più lungo d'Europa -
- 1836: I.K. Brunel: ponte sull'Avon a Bristol 214 m.



- 1850 : + ponte della Basse-Chaine (Angers)
- 1852 : + " " Roche Bernard sulla Vilaine
- 1854 : + ponte sull' Ohio presso Cincinnati

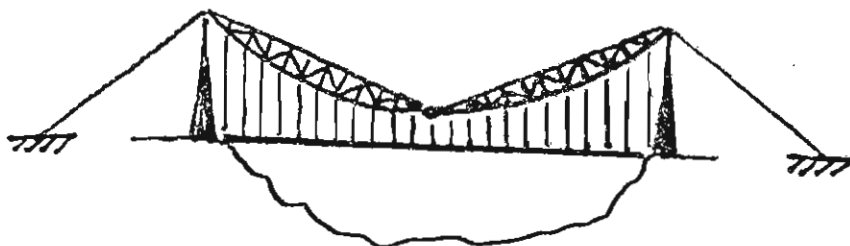
J. A. Röbling : irrigidimento



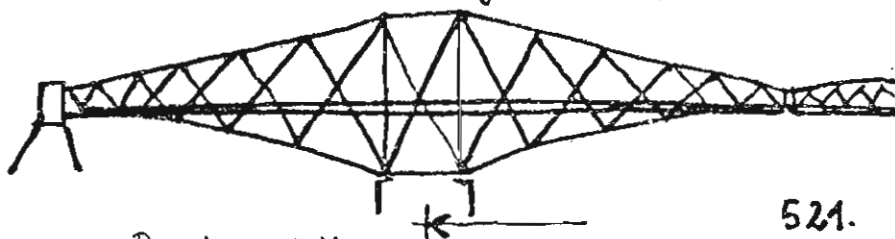
Ponte sul Golden Gate



Ponte su Florianopolis (Brasile)



Ponte di Pittsburgh (1877)



Ponte sul Firth of Forth (sist. Enrico Gerber 1850)



Viareggio 1896

Edilizia comune

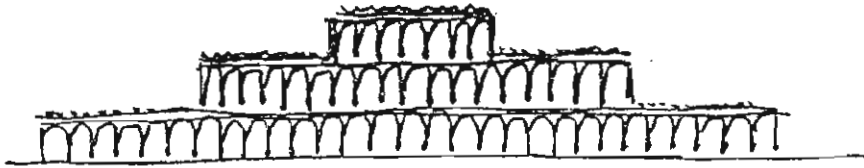


Rondelet 1802

1836 : I

Esposizioni universali

1851. Londra (Henry Cole, princ. Albert) - Horeau - Paxton

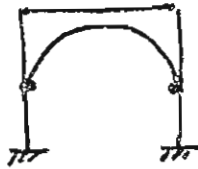


1853 New York

1855 Parigi : Palais de l'Industrie (Viel e Barrault)

→ Passaggio dalla Ghisa all'Acciaio (Bessemer)

1867 Parigi

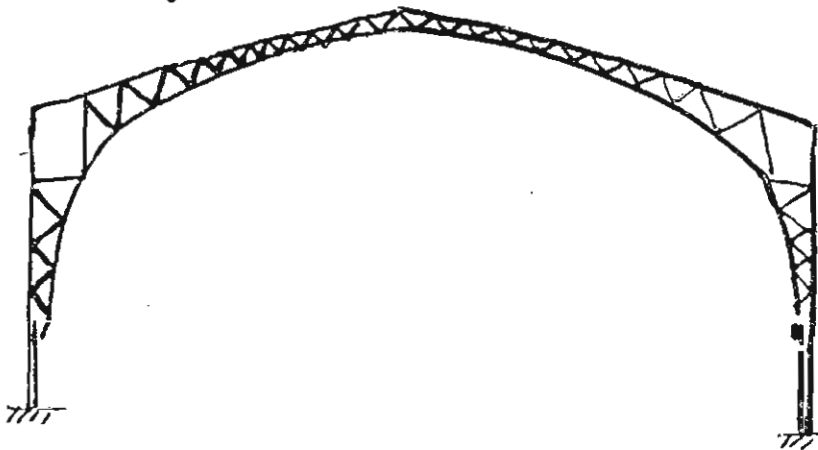


Galerie des Machines (G. Eiffel)

1873. J. Saulnier : primo edificio con scheletro d'acciaio

1873. Vienna : Prater

1878 Parigi - Palais du Trocadero; Galerie des Machines



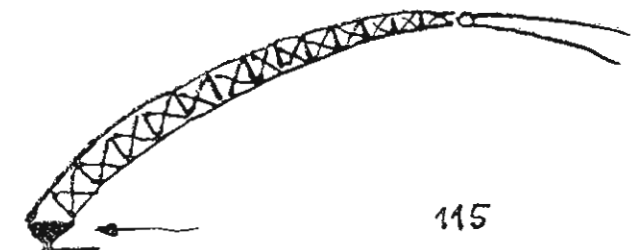
1889. Parigi - (Palazzo di J. Formigé) Galerie des Machines (Ch. Dutert)

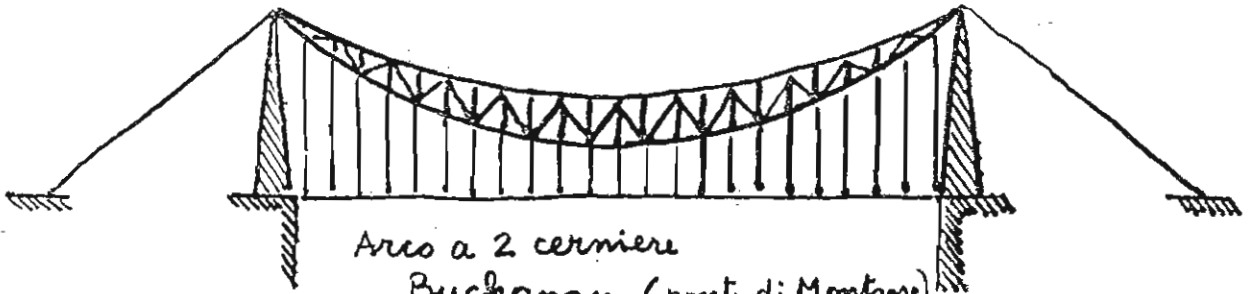
Torre Eiffel

1876 Eiffel : Bon Marché

1880 " ponte sul Garatit

1882 " ... di ...

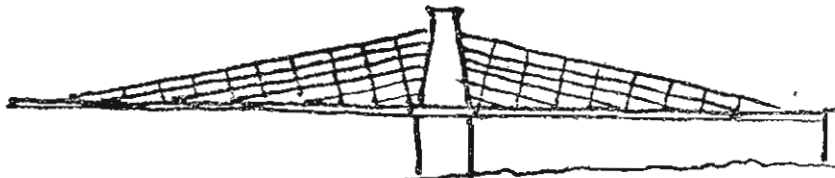




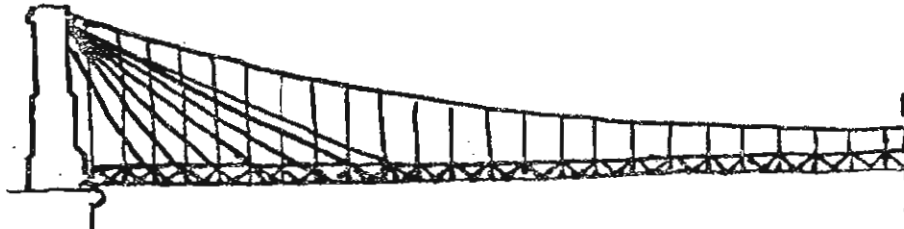
Arco a 2 cerniere
Buchanan (ponti di Montrose)
Torre di Londra
progetto Lindenthal (ponti di S. Lorenzo 1899)



Horizontal stiffening of the cables



Ponte Hatley



Ponte di Praga 1868 (Ordish-Lefeuve)

5. L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. NAVIER.

CAUCHY : I FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLA ELASTICITÀ. ANALISI DELLA TENSIONE.

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE. LEGAME ELASTICO.

LA CONTROVERSIA SULLE COSTANTI ELASTICHE.

GREEN.

5.1. L'École polytechnique

L'insegnamento dell'Architettura nei secoli XVII, XVIII era affidato in Francia all'Académie d'Architecture fondata nel 1671. L'importazione umanistica della scuola dà spazio alla creazione di scuole tecniche:

École des Ponts et Chaussées 1747 (istituita per preparare il Corps des Ponts et Chaussées fondato nel 1716);

École des ingénieurs de Mézières 1748 (ingegneri del Genio).

La contrapposizione tra "scienza" ed "arte", tra ingegneria ed architettura, si accentua con la Rivoluzione Francese. Nel 1793, l'Académie d'Architecture è soppressa ed inserita come sezione dell'Institut (1795).

Caspar Monge propose nel 1794 il rinnovamento delle scuole tecniche. Nel 1795 è fondata l'École polytechnique. Sono in auge molto valorizzati gli insegnamenti scientifici: Lagrange, Monge, Brongniart e successivamente Fourier, Poisson sono tra i primi professori dell'École. L'École polytechnique era propedeutica alle scuole di applicazione: l'École des Ponts et Chaussées, l'École des Mines, le Accademie militari.

Caspar Monge (1746-1818) nacque a Beaune da povera famiglia; a 16 anni si dedica all'insegnamento come istitutore. Gli è offerta dalla scuola militare di Mézières la possibilità di proseguire i suoi studi con Carnot e Bossut. Nel 1768

diventa professore di matematica: tra i suoi alunni L. Carnot e Bricard. In questo periodo, Monge fonda la geometria descrittiva. Nel 1780 diventa membro dell'Accademia delle Scienze. Aderisce alla rivoluzione francese e diventa ministro della marina. Disgustato dalla politica, torna ai suoi interessi scientifici. Come si è detto, è suo merito la fondazione della École Polytechnique; tra i primi allievi, Poinsot, Biot, Malus, Poisson, Gay-Lussac, Arago, Cauchy, Navier. Principi informatori della scuola erano l'unità di scienza e tecnica, l'importazione della didattica per classi di problemi e per lavori di gruppo ("brigades"). Era fatto obbligo ai professori la pubblicazione delle leçons: "Géométrie descriptive", "Cours d'Analyse appliquée à la Géométrie" di Monge; "Leçons de Mécanique Analytique" di Prony; "Traité de Mécanique" di Poisson; "Calcul différentiel et intégral" di Lacroix, ecc.

Sul modello francese: il Politecnico di Zurigo, fondato dal Generale Dufour; 1806: Scuola tecnica superiore a Praga; 1815: Scuola tec. sup. a Vienna; 1825: Scuola Tecnica sup. a Karlsruhe. In America, la "United States Military Academy" a West Point.

5.2. Luigi Navier (1785 - 1836) Nato a Digione da famiglia di avvocati; orfano a 14 anni, fu educato dall'ing. Gauthier suo zio, professore di Scienza delle Costruzioni nell'École des Ponts et Chaussées dal 1819.

1820: Si occupa della flessione nelle lastre

1821: Presenta all'Accademia delle Scienze la memoria sulle "Equazioni fondamentali della Teoria dell'Elasticità"

1823: Formula una teoria sui ponti sospesi.

1824: È nominato membro dell'Accademia

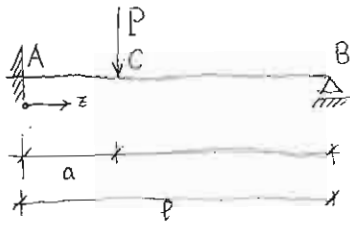
1830: Diventa professore di Calcolo e di Meccanica all'École Polytechnique.

1826: Pubblica il "Résumé des Leçons de Mécanique".

Menzioniamo dapprima i contributi applicativi offerti da Navier nello studio delle travi inflesse partendo dalla equazione euleriana:

$$EJ v'' = -M$$

Merito di Navier è l'aver elaborato tecniche efficaci di calcolo per le travi elastiche iperstatiche. Ad esempio, con riferimento alla trave inflessa della figura



accanto, si può seguire il seguente procedimento:

Per la porzione AC:

$$EJ v_1'' = -P(a-z) + Q(l-z)$$

da cui (tenuto conto delle condizioni in A):

$$EJ v_1' = -P\left(az - \frac{z^2}{2}\right) + Q\left(lz - \frac{z^2}{2}\right)$$

$$EJ v_1 = -P\left(a\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + Q\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right)$$

Per la porzione CB:

$$EJ v_2'' = Q(l-z)$$

da cui:

$$EJ v_2' = Q\left(lz - \frac{z^2}{2}\right) + C_1$$

$$EJ v_2 = Q\left(l\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right) + C_1 z + C_2$$

Dovendo essere:

$$\text{per } z = a$$

$$v_1 = v_2$$

$$v_1' = v_2'$$

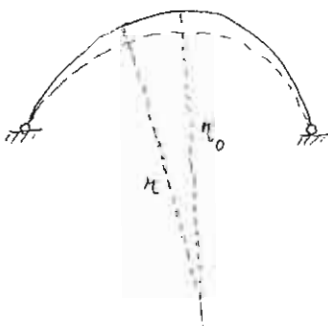
$$\text{per } z = l$$

$$v_2 = 0$$

si ottiene, in definitiva:

$$Q = \frac{P(3a^2l - a^3)}{2l^3}$$

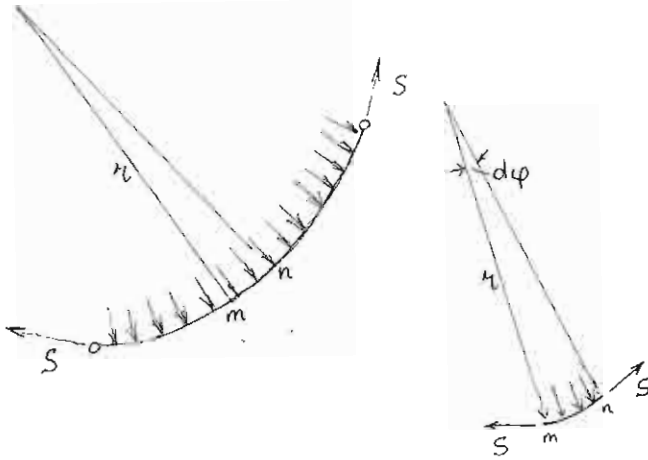
Navier ha studiato anche il problema delle travi curve, partendo dalla formula per esse già proposta da Eulero:



$$EJ \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = M$$

Lo stesso problema fu affrontato e risolto nel 1559 da Resal (e da Boussinesq nel 1883).

Trialasciamo però di occuparci di questo argomento per soffermarci invece sull'analisi compiuta da Navier nell'ultimo capitolo del suo libro (1826) relativa alle funi e alle membrane.



Con riferimento alla figura, supponendo che la fune sopporti soltanto sollecitazioni normali, l'equilibrio di un elemento infinitesimo di fune fornisce:

$$2S \sin \frac{d\varphi}{2} = p ds$$

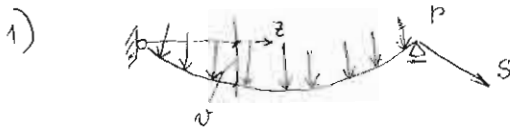
da cui:

$$2S \frac{d\varphi}{2} = p ds$$

e finalmente:

$$\boxed{\frac{S}{r} = p}$$

Vediamo qualche applicazione:



Sia nota la tensione (costante) nella fune. L'equazione, per piccoli spostamenti e deformazioni, si traduce nella:

$$S v'' = -p$$

Da cui:

$$S v' = -p z + C_1$$

$$S v = -p \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Per le condizioni al contorno deve essere:

$$v(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$v(l) = 0 \quad \rightarrow \quad -p \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{p l}{2}$$

In definitiva:

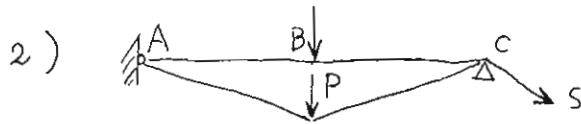
$$v = \frac{p}{2S} (l z - z^2)$$

[Osserviamo che questa espressione è formalmente analoga a quella del momento flettente in una trave appoggiata con carico p:



$$M = \frac{q}{2} (l z - z^2)$$

Ossia, la configurazione in cui si porta la fune soggetta a $S = 1$ corri-
sponde al momento flettente della trave. Cio vuol dire che il diagramma
del momento flettente si dispone secondo la funicolare dei carichi.]



Per il tratto AB è:

$$S v'' = 0 \rightarrow v_1 = c_1 x + c_2$$

Per il tratto BC è:

$$S v_2'' = 0 \rightarrow v_2 = c_3 z + c_4$$

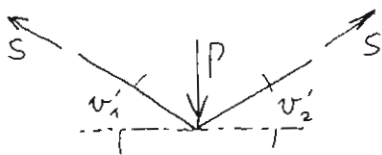
Le condizioni in A e in C sono:

$$v_1(0) = 0 \quad v_2(l) = 0$$

Le condizioni di raccordo in B sono:

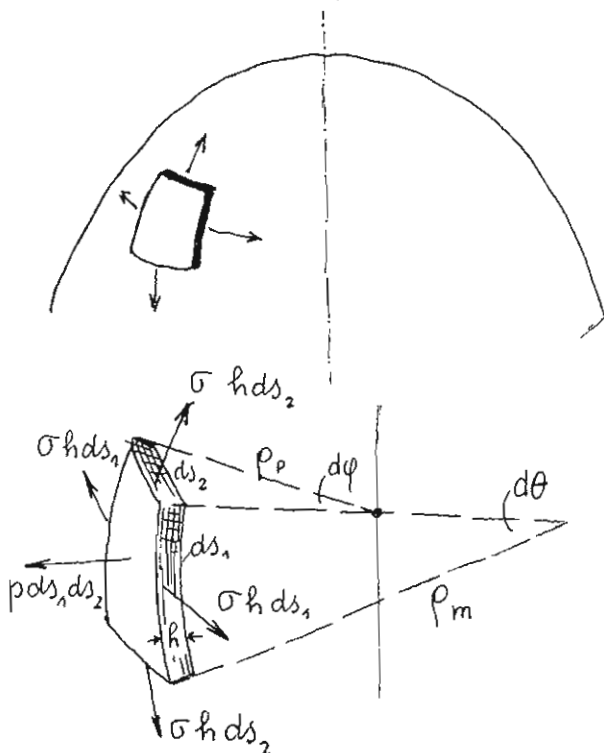
$$v_1\left(\frac{l}{2}\right) = v_2\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$S(v_1' - v_2') = P$$



Statica delle membrane

Nello studio delle membrane, Navier considera il caso particolare in cui
la tensione sia riconducibile ad un'unica incognita σ (vedi la figura).



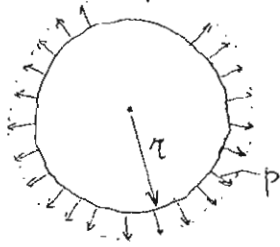
Indicando con ρ_m il raggio di curvatura
dell'arco di meridiano, e con ρ_p il secondo
raggio principale, ossia il raggio di curvatura
della sezione normale perpendicolare all'arco
di meridiano, l'equilibrio locale fornisce
la condizione:

$$p ds_1 ds_2 - 2 \sigma h ds_2 \frac{d\theta}{2} - 2 \sigma h ds_1 \frac{d\phi}{2} = 0$$

Da cui:

$$\sigma \left(\frac{1}{\rho_m} + \frac{1}{\rho_p} \right) = \frac{p}{h}$$

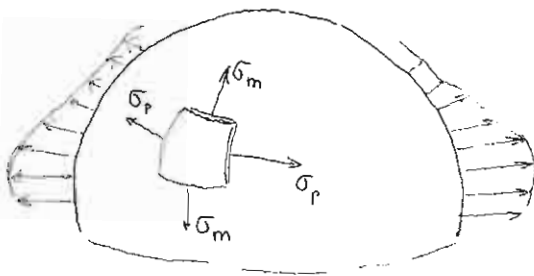
Ad esempio, in un guscio sferico soggetto a pressione uniforme l'ipotesi di Navier è soddisfatta per la simmetria, onde la (*) si traduce nella determinazione:



$$\sigma = \frac{pr}{2h}$$

P. S. Laplace si pose in un' ipotesi più generale (benché legata alla astral-simmetria del guscio e della distribuzione dei carichi).

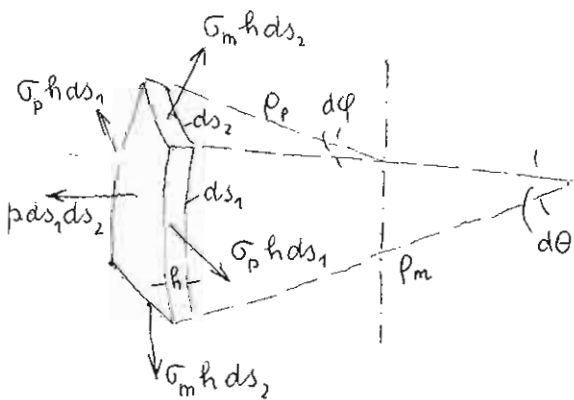
l'equilibrio locale (rispetto alla normale alla superficie) si esprime allora nella:



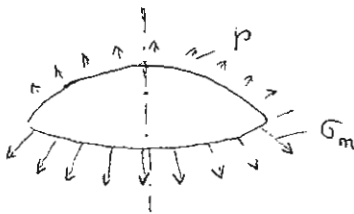
$$p ds_1 ds_2 - 2 \sigma_m h ds_2 \frac{d\theta}{2} - 2 \sigma_p h ds_1 \frac{d\varphi}{2} = 0$$

Da cui:

$$\boxed{\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_p}{\rho_p} = \frac{p}{h}}$$

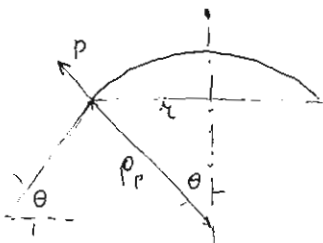


In questa equazione figurano due incognite, σ_m, σ_p . L'altra condizione è data dalla equazione di equilibrio globale alla traslazione "verticale":



$$\sigma_m h \cdot 2\pi r \sin \theta = Q$$

dove Q è la risultante verticale dei carichi p sovrastanti il parallelo in esame. Ne segue:

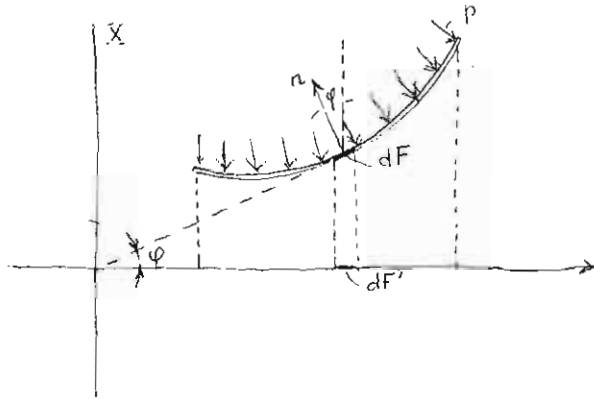


$$\boxed{\sigma_m = \frac{Q}{2\pi \rho_p h \sin^2 \theta}}$$

Applicazioni

Prima di passare ad esempi concreti, dimostriamo i seguenti due teoremi.

Teorema 1 :



Se una superficie F è soggetta a pressione uniforme p , allora, quale che sia la forma della superficie, la proiezione della risultante delle forze di pressione su un asse fisso x è uguale al prodotto della pressione p per l'area della proiezione F' della superficie F su un piano perpendicolare a x .

Dim.: Infatti la proiezione della risultante

delle pressioni sull'asse x vale

$$P_x = \int_F p \cos \varphi dF$$

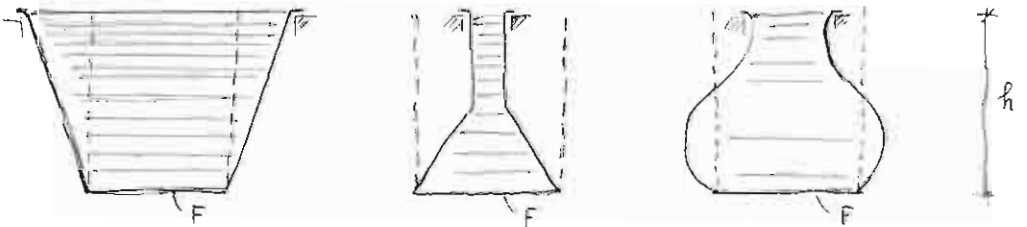
D'altra parte è:

$$dF' = dF \cdot \cos \varphi$$

Quindi

$$P_x = p \int_F dF' = p F'$$

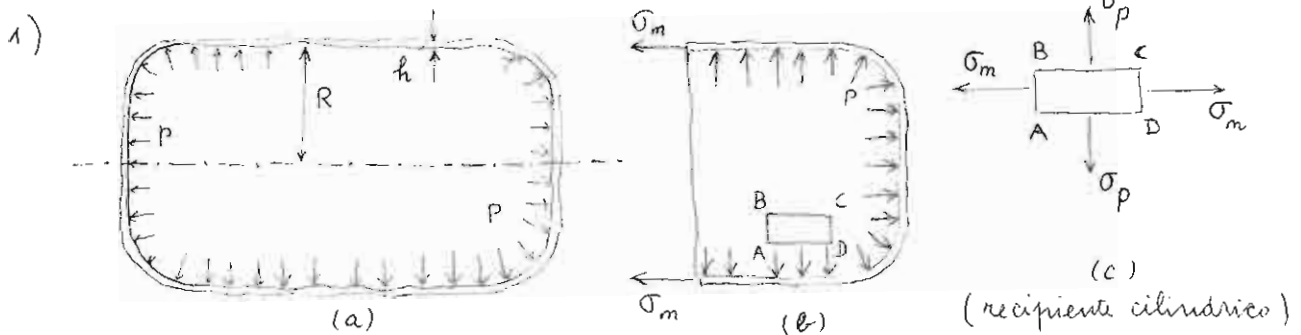
Teorema 2 : Se una superficie F subisce la pressione di un liquido, la componente verticale delle forze di pressione è uguale al peso del liquido contenuto o contenibile nel cilindro avente per base inferiore F , e per superiore la superficie libera del liquido.



Dim.: è una immediata conseguenza del teor. precedente.

Osservare che la pressione alla base nei tre casi rappresentati in figura è la stessa e vale $\gamma h F$ (γ : peso specifico del liquido).

Esempi



Con riferimento a (b) l'equazione di equilibrio fornisce:

$$\sigma_m 2\pi R h = P$$

dove P è la componente assiale delle forze di pressione. Grazie al teor. 1 si ha:

$$P = \pi R^2 p$$

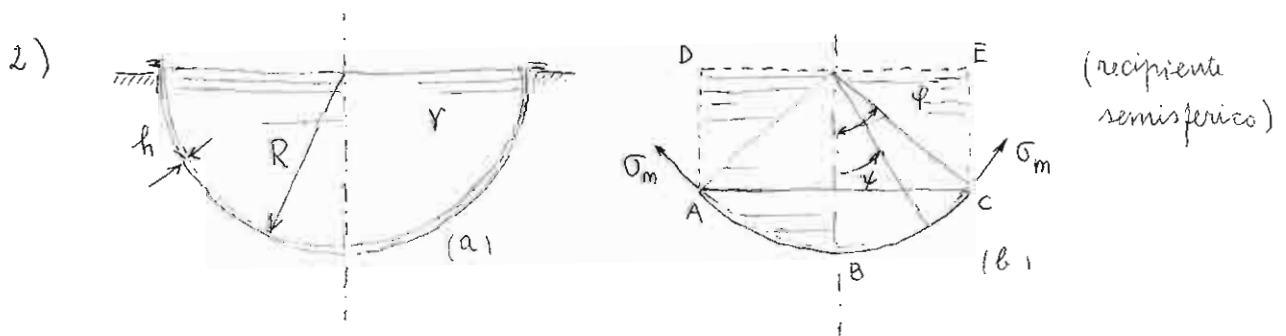
Quindi:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h}$$

Inoltre per il cilindro è $\rho_m = \infty$, $\rho_p = R$. Dalla formula di Laplace si deduce:

$$\sigma_p = \frac{pR}{h}$$

ovvia, la tensione circonferenziale vale il doppio della tensione meridiana.



γ : peso specifico del liquido.

Per utilizzare l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale della porzione (b) occorre calcolare la risultante P delle forze di pressione del liquido. Grazie al teor. 2, P è uguale al peso del liquido nel volume ABCED.

ora, si ha:

volume Tot = volume del segmento ABC + volume del cilindro ADEC

e:

$$V_{\text{segm}} = \int_0^\varphi \pi (R \sin \psi)^2 R \sin \psi \, d\psi = \pi R^3 \left(\frac{2}{3} - \cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right)$$

$$V_{\text{cil.}} = \pi R^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

Il volume totale è:

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3 (1 - \cos^3 \varphi)$$

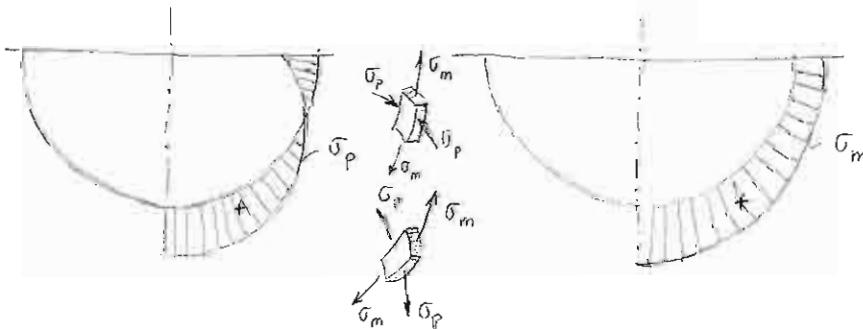
si trova dunque:

$$P = \frac{2}{3} \pi R^3 \gamma (1 - \cos^3 \varphi)$$

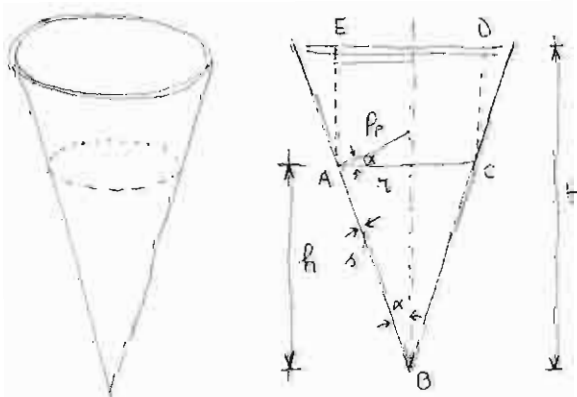
$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{3h} \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \quad (*)$$

Tenuto conto che $\rho_m = \rho_p = R$, $p = \gamma R \cos \varphi$, dalla equazione di Laplace si trae dopo avervi sostituito la (*).

$$\sigma_p = \frac{\gamma R^2}{3h} \left[3 \cos \varphi - \frac{1 - \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi} \right]$$



3) Membrana conica ; γ peso spec. del liquido



$$\begin{aligned} \text{Volume}_{ABCDE} &= \frac{\pi r^2 h}{3} + \pi r^2 (H - h) \\ &= \pi h \left(H - \frac{2h}{3} \right) \text{tg}^2 \alpha \end{aligned}$$

$$\sigma_m = \frac{\gamma \pi h^2 \left(H - \frac{2h}{3} \right) \text{tg}^2 \alpha}{2 \pi h s \text{tg} \alpha \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\gamma}{2} h \left(H - \frac{2h}{3} \right) \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\text{Essendo } \rho_p = \frac{r}{\cos \alpha} = h \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \sigma_p = \frac{\gamma (H - \frac{2h}{3}) h}{s} \frac{\text{tg} \alpha}{\cos \alpha}$$

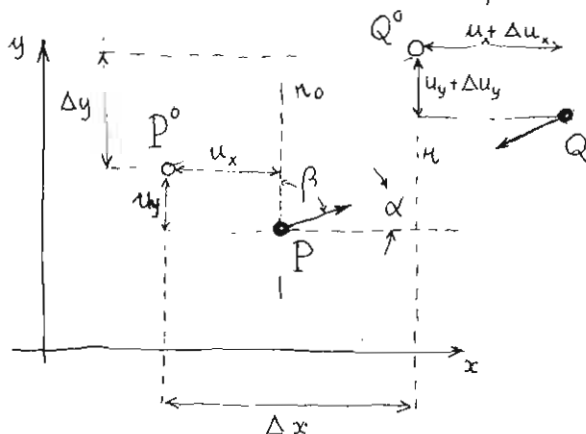
5.3. Navier e la teoria matematica dell'elasticità.

"Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques", presentata all'Accademia il 14 Maggio 1821.

Fin dal tempo di Newton si era fatta strada l'idea che l'elasticità potesse essere spiegata in termini di forze attrattive o repulsive tra le molecole. Questa nozione fu sviluppata nel secolo XVIII da Boscovich (1763) il quale suppose che tra due qualunque molecole agissero forze dirette secondo la congiungenti, attrattive per certe distanze e repulsive per altre. Usando questa teoria, arricchita dell'ipotesi che tali forze molecolari fossero rapidamente decrescenti all'aumentare della distanza tra le molecole, Laplace (Ann. chim. et phys. 12, 1819) fu in grado di sviluppare la sua teoria della capillarità.

L'applicazione della teoria di Boscovich all'analisi della deformazione dei corpi elastici fu iniziata da Poisson (Mém. Acad. 1812) nelle sue ricerche sulla flessione delle lastre. Egli considera la lastra come sistema di particelle distribuite nel piano medio della lastra. Tuttavia un tale sistema resiste a trazione e a compressione ma non a flessione, e quindi può rappresentare una membrana ma non una lastra.

Un ulteriore passo avanti nella teoria molecolare del corpo elastico fu compiuto da Navier. La sua memoria (1821) contiene alcune imprecisioni che rendono non del tutto corretti i risultati ottenuti. E' però importante richiamare qui lo spirito informativo del discorso. Anche egli ritiene che la spiegazione profonda dei fenomeni elastici risieda nell'azione mutua tra le molecole: tale azione si esprime in forze dirette secondo la retta che le congiunge e proporzionali al cambiamento di distanza tra le particelle stesse.



Siano P^0 e Q^0 i punti nei quali sono disposte, prima della deformazione, due molecole assai prossime, e siano P, Q le posizioni assunte dopo che la molecola in P^0 ha subito uno spostamento $\mathbf{u} \equiv (u_x, u_y, u_z)$

e la molecola in Q_0 ha subito uno spostamento $(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) = (u_x + \Delta u_x, u_y + \Delta u_y, u_z + \Delta u_z)$; se r_0 è la distanza $P_0 Q_0$ e r la distanza PQ , si ha:

$$r - r_0 = \Delta u_x n_x + \Delta u_y n_y + \Delta u_z n_z$$

con:

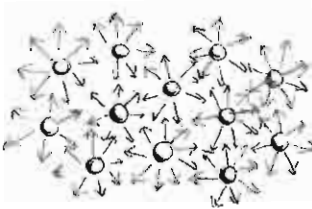
$$n_x = \cos \alpha, \quad n_y = \cos \beta, \quad n_z = \cos \gamma$$

Ebbene, secondo Navier, le particelle in P, Q si scambiano forze interne di entità:

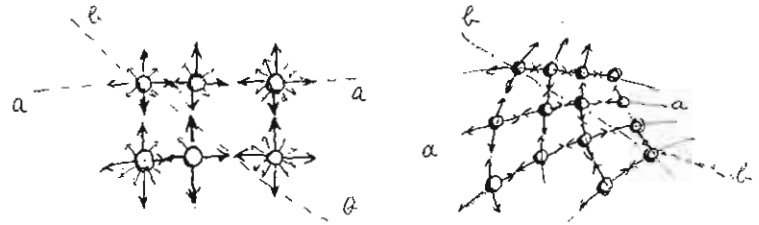
$$R = f(r_0)(r - r_0) = f(r_0)(\Delta u_x n_x + \Delta u_y n_y + \Delta u_z n_z)$$

dove $f(r_0)$ è una funzione rapidamente decrescente con r_0 .

L'altra ipotesi fondamentale che regge il discorso di Navier è l'isotropia: nell'ambito della concezione molecolare l'isotropia si traduce nella condizione che l'interazione tra P e Q dipenda solo dalla distanza e non dalla direzione PQ .



Isotropia: distribuzione caotica delle molecole tutte ugualmente interagenti



Esempi di anisotropia:

l'interazione delle molecole nella linea $a-a$ è diversa da quella relativa alla $b-b$

Con queste premesse, Navier è in grado di descrivere le condizioni di equilibrio locale in termini delle funzioni $u_x(x, y, z)$, $u_y(x, y, z)$, $u_z(x, y, z)$ che definiscono in ogni punto del corpo lo stato di spostamento.

Poiché è:

$$\Delta x = r_0 n_x, \quad \Delta y = r_0 n_y, \quad \Delta z = r_0 n_z$$

e poiché, d'altra parte, le quantità $\Delta u_x, \Delta u_y, \Delta u_z$ possono essere rappresentate dagli sviluppi

$$\Delta u_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \Delta x^2 + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \dots$$

(e analoghe per $\Delta u_y, \Delta u_z$)

si può esprimere la componente secondo un asse coordinato (ades. l'asse x) della forza interna prodotta in P per l'azione di Q nella forma:

$$R_x = R n_x = r_0 f(r_0) \left[n_x^3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + n_x^2 n_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \dots \right] + \\ + r_0^2 f(r_0) \left[\frac{n_x^4}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + n_x^3 n_y \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \dots + n_x n_y^3 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right] \quad (*)$$

Considerando ora la somma delle azioni prodotte in P da tutte le particelle circostanti, Navier osserva che tutti i termini contenenti coseni n_x, n_y, n_z elevati a potenze dispari non danno contributo, nell'ipotesi di isotropia. Così gli integrali della prima riga della (*) si annullano. La valutazione degli integrali della seconda riga che non sono nulli è ricondotta al calcolo dei soli integrali:

$$C = \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty r_0^4 f(r_0) dr_0$$

Se si suppone noto il valore di questo integrale, la componente secondo x della forza interna risultante agente su P diventa:

$$\sum R_x = C \left(3 \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right)$$

(Analoghe espressioni per $\sum R_y, \sum R_z$)

Indicando ora con F_x, F_y, F_z le componenti della forza esterna risultante agente su P , l'equilibrio tra forze esterne e interne fornisce le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} C \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + F_x = 0 \\ C \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + F_y = 0 \\ C \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right) + F_z = 0 \end{cases}$$

dette equazioni di Navier.

Esse non sono del tutto corrette, poiché, come vedremo, un corpo elastico isotropo (e lineare) è caratterizzato in generale da 2 costanti e non da una (la C) come suppone Navier. Tuttavia è merito di Navier aver dato una prima deduzione

delle equazioni di equilibrio in termini di spostamento per un corpo tridimensionale. (Confrontare il risultato ottenuto con l'equazione della linea elastica per la trave inflessa).

5.4. Agostino Cauchy (1789-1857). L'Analisi della tensione.

Nasce a Parigi da un magistrato; durante la Rivoluzione si rifugia a Arcueil dove vivevano Laplace e Berthollet.

1807 : entra nell' École des Ponts et Chaussées

1811-12 : lavora a Cherbourg come ingegnere del porto. Pubblica memorie all'Accademia delle Scienze.

1813 : torna a Parigi e si dedica alla ricerca matematica.

Dal 1813 insegna all' École Polytechnique e alla Sorbonne.

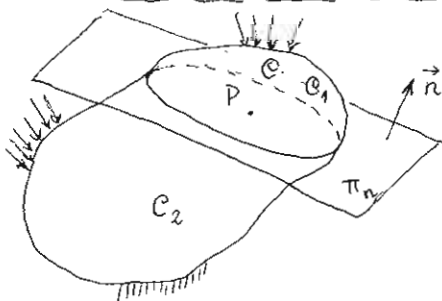
1821 : "Cours d'Analyse de l'École Polytechnique"

1822 : Memoria all'Accademia delle Scienze sulla teoria dell'elasticità.

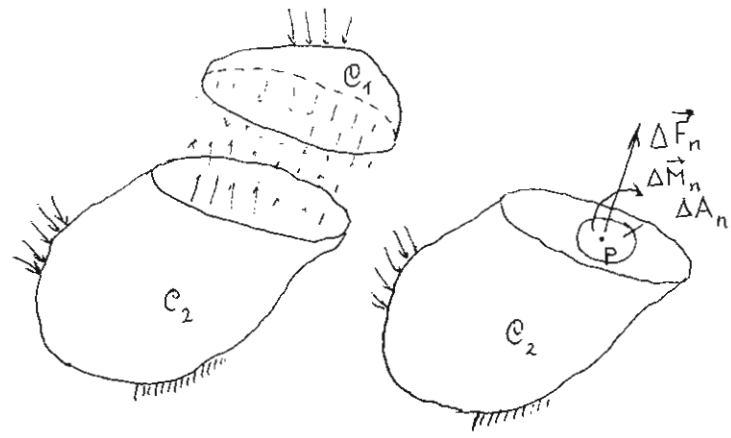
Con A. Cauchy, la teoria matematica dell'elasticità consegue una prima soddisfacente sistemazione. A Cauchy si deve una compiuta analisi del concetto di tensione e la definizione delle equazioni indefinite di equilibrio. A Cauchy si deve inoltre l'analisi della deformazione e infine la descrizione corretta del legame elastico lineare isotropo.

Seguendo quindi il discorso di Cauchy siamo in grado di impadronirci degli strumenti concettuali più importanti per la Scienza delle Costruzioni. Per dare alla trattazione maggiore sistematicità, nell'ambito dell'analisi della tensione ci soffermeremo anche su un contributo storicamente successivo dovuto a O. Mohr (il cosiddetto "cerchio di Mohr").

Analisi della tensione



Mentre Navier, nello studio dell'equilibrio di un corpo elastico, aveva considerato le forze agenti tra due singole molecole, Cauchy applica ed estende la nozione di pressione su un piano.



Supponiamo che il corpo C sia in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne attive e reattive. Consideriamo, con riferimento a un punto P un piano π_n (la cui giacitura è individuata dai coseni direttori della normale \vec{n}).

Il piano π_n individua due porzioni C_1, C_2 che attraverso π_n si scambiano azioni rappresentabili mediante una distribuzione superficiale di forze. Se ΔA_n indica l'area di un intorno di P e $\Delta \vec{F}_n, \Delta \vec{M}_n$ la risultante e il momento risultante delle forze agenti su ΔA_n , consideriamo i rapporti:

$$\frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A_n}, \quad \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta A_n}$$

Per $\Delta A_n \rightarrow 0$ è prevedibile che anche $\Delta \vec{F}_n \rightarrow \vec{0}$ e $\Delta \vec{M}_n \rightarrow \vec{0}$. Supponiamo dunque che esistano finiti i limiti dei rapporti precedenti per $\Delta A_n \rightarrow 0$, ed anzi, più specificamente, si abbia:

$$\vec{S}_n = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A_n}$$

$$\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta A_n} = \vec{0}$$

dove \vec{S}_n è dunque un vettore di modulo finito. \vec{S}_n prende il nome di tensione in P secondo la giacitura n . L'insieme $\{\vec{S}_n\}$ che contiene tutte le possibili determinazioni della tensione al variare della giacitura di π_n individua la tensione in P .

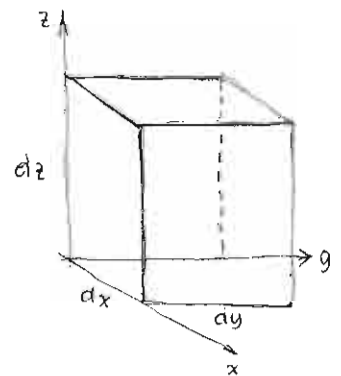
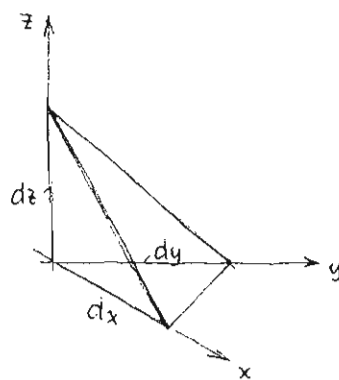
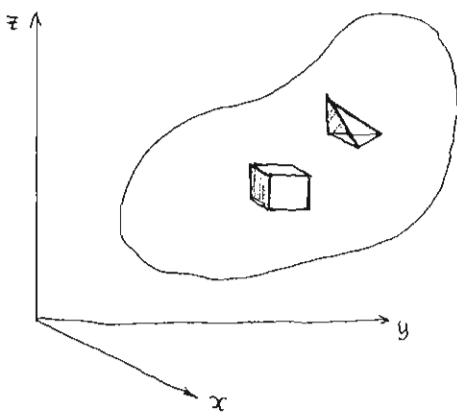
L'ipotesi: $\lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}_n}{\Delta A_n} = \vec{0}$ configura la classe dei corpi di Cauchy e può ritenersi valida o utilizzabile per i problemi che interessano la Scienza delle Costruzioni. Tuttavia essa può essere rimossa, così come promosse i fratelli Cosserat. In tal caso si definisce una classe più generale

di corpi, detti "polari", entro il cui ambito si inscrivono i corpi di Cauchy.

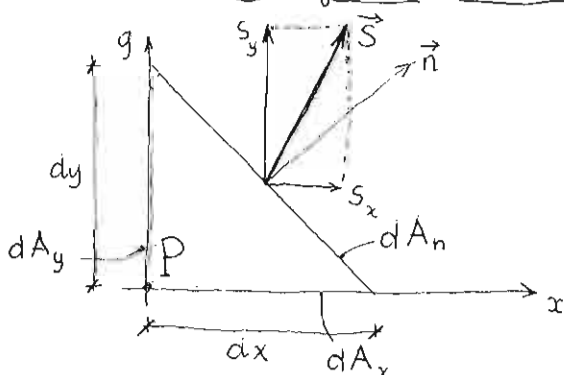
[osservazione metodologica: la definizione di tensione che si è introdotta sopra è tutt'altro che chiara dal punto di vista critico. 1) Il limite per $\Delta A_n \rightarrow 0$ non può essere fondato rigorosamente in termini matematici. 2) la tensione si presenta come concetto intrinsecamente non operativo. Quindi la sua legittimità può essere mostrata solo indirettamente, verificando se la tensione, intesa come "invenzione" puramente matematica, si riveli uno strumento utile per descrivere il comportamento dei corpi soggetti all'azione di forze. Lo sviluppo della meccanica dei continui e delle strutture ci assicura che il "costrutto" della Tensione è soddisfacente per gli scopi tecnici.

Cfr.: P.W. Bridgman: la logica della fisica moderna,
Boringhieri 1965, p. 75 ss]

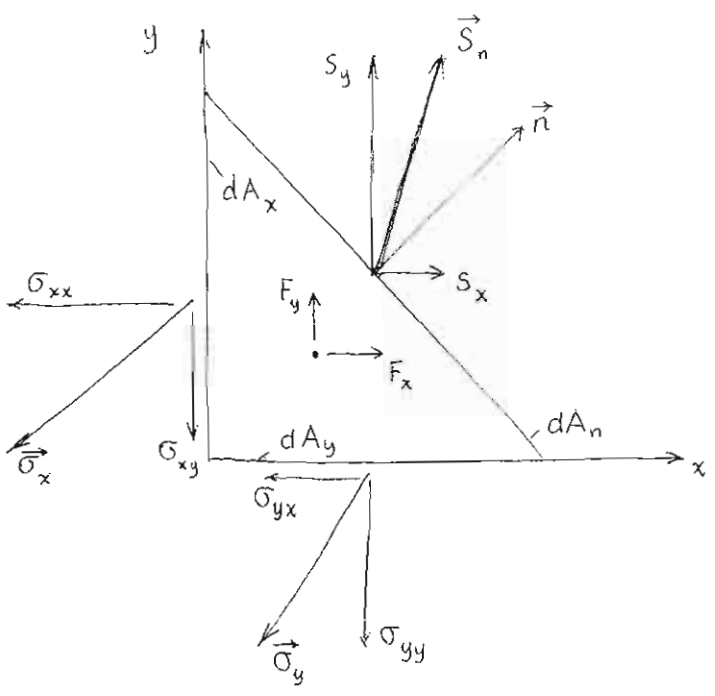
L'analisi della tensione può essere svolta prendendo per "protagonisti" un tetraedro e un parallelepipedo infinitesimi estratti dal corpo \mathcal{C} .



Il "grande teorema di Cauchy" (Exercices de Mathématique 2 (1827)).



Consideriamo appunto nel punto P un tetraedro infinitesimo di volume dV le cui tre facce ortogonali dA_x , dA_y , dA_z siano parallele ai tre piani coordinati, mentre la faccia obliqua dA_n abbia la giacitura del piano π_n di normale



n rispetto al quale è stata definita la tensione \vec{S}_n . Indichiamo con $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ la tensione agente secondo le giaciture coordinate. Le componenti di \vec{S}_n siano S_x, S_y, S_z ; le componenti di $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$ siano indicate con:

$$\vec{\sigma}_x \equiv (\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz})$$

$$\vec{\sigma}_y \equiv (\sigma_{yx}, \sigma_{yy}, \sigma_{yz})$$

$$\vec{\sigma}_z \equiv (\sigma_{zx}, \sigma_{zy}, \sigma_{zz})$$

All'elemento di volume dV è applicata

una forza di volume \vec{F} di componenti F_x, F_y, F_z (ad esempio il "peso specifico")
L'equilibrio del tetraedro fornisce allora:

$$S_x dA_n - (\sigma_{xx} dA_x + \sigma_{yx} dA_y + \sigma_{zx} dA_z) + F_x dV = 0 \quad (*)$$

(e analoghe)

Se n_x, n_y, n_z sono i coseni direttori della normale alla giacitura π_n , si ha:

$$\frac{dA_x}{dA_n} = n_x, \quad \frac{dA_y}{dA_n} = n_y, \quad \frac{dA_z}{dA_n} = n_z$$

mentre, per essere infinitesimo il tetraedro, si deve ritenere:

$$\frac{dV}{dA_n} = 0$$

Pertanto, la (*) si traduce nella:

$$S_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z$$

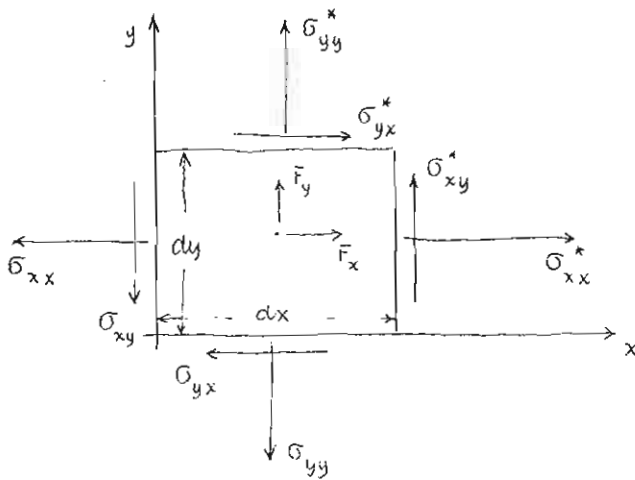
Analogamente si perviene alle:

$$S_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z$$

$$S_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

Equazioni indefinite dell'equilibrio

Consideriamo ora un parallelepipedo infinitesimo con gli spigoli paralleli agli assi x, y, z . Sulle sue facce sono state segnate le componenti di tensione.



A queste vien attribuito convenzionalmente il segno positivo se concordi con quelle rappresentate in figura. Ossia:

σ_{ij} è positiva se concorde con gli assi sulle facce la cui normale esterna è concorde con gli assi; e ancora

σ_{ij} è positiva se discorde con gli assi sulle facce la cui normale esterna è discorde con gli assi.

Indicando con F_x, F_y, F_z le componenti delle forze di volume, l'equilibrio alla traslazione si esprime nella:

$$-\sigma_{xx} dy dz + \sigma_{xx}^* dy dz - \sigma_{yx} dx dz + \sigma_{yx}^* dx dz - \sigma_{zx} dx dy + \sigma_{zx}^* dx dy + F_x dx dy dz = 0$$

e in equazioni analoghe.

Se le funzioni $\sigma_{ij}(x, y, z)$ sono continue, si ha poi:

$$\sigma_{xx}^* = \sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$$

$$\sigma_{yx}^* = \sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} dy$$

$$\sigma_{zx}^* = \sigma_{zx} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz$$

(ecc.)

Pertanto, per non esser nullo il prodotto $dx dy dz$, debbono esser soddisfatte in tutti i punti interni del corpo le condizioni di equilibrio locale:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases}$$

L'equilibrio alla rotazione del parallelepipedo sopra considerato intorno all'asse z si esprime nella:

$$\sigma_{xy} dy dz \frac{dx}{2} + \sigma_{xy}^* dy dz \frac{dx}{2} - \sigma_{yx} dx dz \frac{dy}{2} - \sigma_{yx}^* dx dz \frac{dy}{2} = 0$$

da cui, trascurando i termini infinitesimi d'ordine superiore:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

In modo analogo si perviene alle

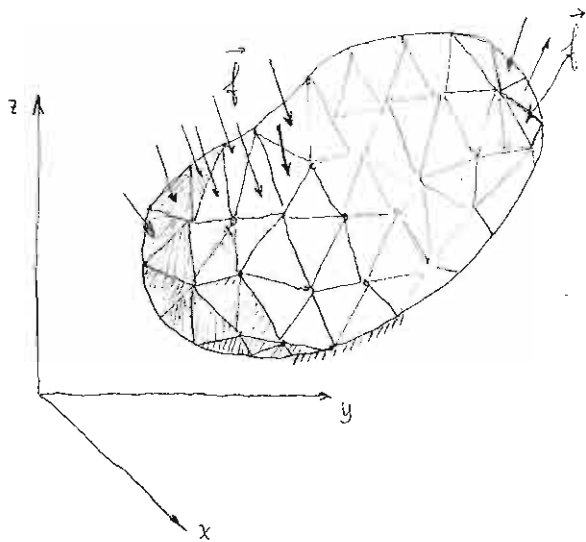
$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

In generale, dunque:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

Certanto le nove componenti σ_{ij} si riconducono a sei. L'"ente" da esse individuato è un "tensore" doppio (a 2 indici) e simmetrico.

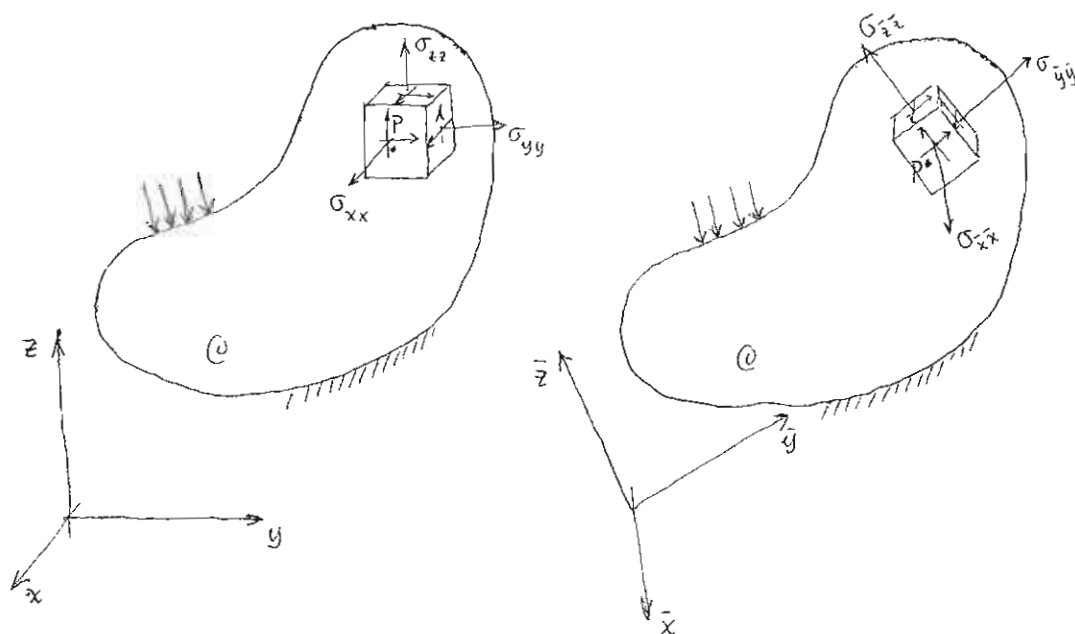


Per i punti materiali appartenenti alle zone del contorno nelle quali sono assegnate le forze (di superficie) $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ si possono scrivere le equazioni di equilibrio locale utilizzando il "grande teorema di Cauchy". Sia P un punto del contorno: costruiamo intorno ad esso un tetraedro infinitesimo avente tre facce perpendicolari agli assi e la quarta

faccia tangente al contorno. La forza superficiale agente su P, di componenti f_x, f_y, f_z gioca lo stesso ruolo della tensione \vec{S}_n di componenti S_x, S_y, S_z considerate nel teorema di Cauchy. Quindi si possono scrivere le equazioni:

$$\begin{cases} f_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\ f_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\ f_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \end{cases}$$

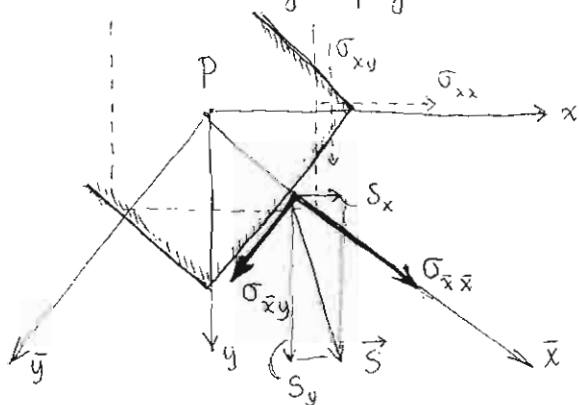
Tensioni principali e direzioni principali



Con riferimento a un punto generico P del continuo \mathcal{C} , siano $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \dots, \sigma_{zz}$ le componenti di tensione associate a una determinata posizione degli assi coordinati x, y, z . Se ora si ruotano gli assi, disponendoli su $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, le componenti di tensione ad essi associate diventano $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}\bar{y}}, \dots, \sigma_{\bar{z}\bar{z}}$. Ciò significa che, mentre sulle facce di un cubetto infinitesimo avvolgente P , con gli spigoli paralleli a x, y, z , le tensioni agenti sono $\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z$, sulle facce del cubetto con gli spigoli paralleli a $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, le tensioni agenti sono generalmente diverse e sono designate da $\vec{\sigma}_{\bar{x}}, \vec{\sigma}_{\bar{y}}, \vec{\sigma}_{\bar{z}}$.

Ci chiediamo ora:

- 1) quali relazioni legano le componenti $\sigma_{\bar{x}\bar{x}}, \sigma_{\bar{x}\bar{y}}, \dots, \sigma_{\bar{z}\bar{z}}$, alle componenti $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \dots, \sigma_{zz}$?
- 2) si può definire una rotazione degli assi tale che sulle facce di un cubetto con gli spigoli ad essi paralleli agiscano solo tensioni normali?



Per quanto riguarda il primo punto, basta osservare che, per semplice composizione di forze, si ha

$$\begin{aligned}\sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= S_x n_{x\bar{x}} + S_y n_{y\bar{x}} + S_z n_{z\bar{x}} \\ \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= S_x n_{x\bar{y}} + S_y n_{y\bar{y}} + S_z n_{z\bar{y}} \\ & \text{(e analoghe)}\end{aligned}$$

dove si è posto:

$$n_{x\bar{x}} = \cos(x, \bar{x}), \quad n_{x\bar{y}} = \cos(x, \bar{y}), \quad \text{ecc.}$$

D'altra parte, per il teorema di Cauchy, risulta:

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_{xx} n_{x\bar{x}} + \sigma_{yx} n_{y\bar{x}} + \sigma_{zx} n_{z\bar{x}} \\ S_y &= \sigma_{xy} n_{x\bar{x}} + \sigma_{yy} n_{y\bar{x}} + \sigma_{zy} n_{z\bar{x}} \\ S_z &= \sigma_{xz} n_{x\bar{x}} + \sigma_{yz} n_{y\bar{x}} + \sigma_{zz} n_{z\bar{x}} \end{aligned} \quad (*)$$

Sostituendo le (*) nelle (o), si ottiene in definitiva:

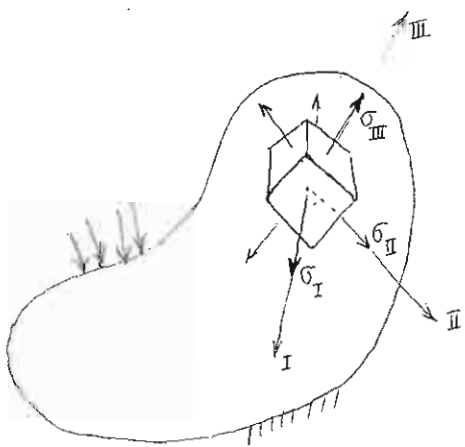
$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \sigma_{xx} n_{x\bar{x}} n_{x\bar{x}} + \sigma_{yx} n_{y\bar{x}} n_{x\bar{x}} + \sigma_{zx} n_{z\bar{x}} n_{x\bar{x}} + \\ &+ \sigma_{xy} n_{x\bar{x}} n_{y\bar{x}} + \sigma_{yy} n_{y\bar{x}} n_{y\bar{x}} + \sigma_{zy} n_{z\bar{x}} n_{y\bar{x}} + \\ &+ \sigma_{xz} n_{x\bar{x}} n_{z\bar{x}} + \sigma_{yz} n_{y\bar{x}} n_{z\bar{x}} + \sigma_{zz} n_{z\bar{x}} n_{z\bar{x}} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= \sigma_{xx} n_{x\bar{x}} n_{x\bar{y}} + \sigma_{yx} n_{y\bar{x}} n_{x\bar{y}} + \sigma_{zx} n_{z\bar{x}} n_{x\bar{y}} + \\ &+ \sigma_{xy} n_{x\bar{x}} n_{y\bar{y}} + \sigma_{yy} n_{y\bar{x}} n_{y\bar{y}} + \sigma_{zy} n_{z\bar{x}} n_{y\bar{y}} + \\ &+ \sigma_{xz} n_{x\bar{x}} n_{z\bar{y}} + \sigma_{yz} n_{y\bar{x}} n_{z\bar{y}} + \sigma_{zz} n_{z\bar{x}} n_{z\bar{y}} \end{aligned}$$

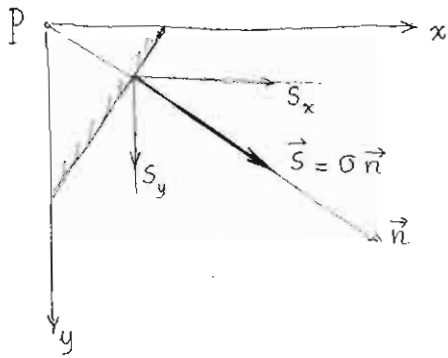
e analoghe. La formola generale che le riassume può esser scritta sinteticamente denominando gli assi x, y, z con gli indici $1, 2, 3$, e gli assi $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ con $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$; si ha allora:

$$\sigma_{\bar{i}\bar{j}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_{i\bar{i}} n_{j\bar{j}} \quad \bar{i}, \bar{j} = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}.$$



Passiamo alla seconda questione.

Procediamo con metodo "euristico": supponiamo cioè di aver già risolto il problema e d'aver quindi determinato almeno una giacitura in P rispetto alla quale la tensione sia normale e valga σ .



Ne segue:

$$S_x = \sigma n_x$$

$$S_y = \sigma n_y$$

$$S_z = \sigma n_z$$

D'altra parte, per il teorema di Cauchy, si ha anche:

$$S_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z$$

$$S_y = \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z$$

$$S_z = \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z$$

Quindi dovranno essere verificate le seguenti relazioni:

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = \sigma n_x$$

$$\sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z = \sigma n_y$$

$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z = \sigma n_z$$

Ossia:

$$\begin{cases} (\sigma_{xx} - \sigma) n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z = 0 \\ \sigma_{xy} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma) n_y + \sigma_{zy} n_z = 0 \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma) n_z = 0 \end{cases} \quad (80)$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari omogenee nelle incognite n_x, n_y, n_z ; σ è poi l'ulteriore incognita nei coefficienti $(\sigma_{xx} - \sigma)$, $(\sigma_{yy} - \sigma)$, $(\sigma_{zz} - \sigma)$. La soluzione banale $n_x = n_y = n_z = 0$ non può essere accettata, poiché, come è noto, deve essere:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Si deve quindi imporre la condizione che il determinante dei coefficienti sia nullo; cioè:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

Ciò si traduce in un'equazione di terzo grado in σ :

$$\sigma^3 - I_{\sigma} \sigma^2 + II_{\sigma} \sigma - III_{\sigma} = 0 \quad (*)$$

dove i coefficienti I_{σ} , II_{σ} , III_{σ} sono così definiti :

$$I_{\sigma} = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

$$II_{\sigma} = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{xx}\sigma_{zz} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2$$

$$III_{\sigma} = \det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

L'equazione (*) si incontra in numerosi settori della meccanica; essa fu introdotta dapprima per problemi di Meccanica Celeste da Luigi Lagrange. Per questa sua origine prende il nome di "equazione secolare".

Osservazione importante. Ricordando quel che n è studiato in Geometria Analitica, si riconosce che i coefficienti I_{σ} , II_{σ} , III_{σ} sono invarianti, ossia non variano al ruotare degli assi x, y, z e al corrispondente variare di $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \dots, \sigma_{zz}$. In altri termini, mentu, al ruotare degli assi ad es. da x, y, z a $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, in generale è :

$$\sigma_{xx} \neq \sigma_{\bar{x}\bar{x}} \quad , \quad \sigma_{xy} \neq \sigma_{\bar{x}\bar{y}} \quad , \quad \dots$$

per $I_{\sigma}, II_{\sigma}, III_{\sigma}$ si ha invece :

$$I_{\sigma} = I_{\bar{\sigma}} \quad , \quad II_{\sigma} = II_{\bar{\sigma}} \quad , \quad III_{\sigma} = III_{\bar{\sigma}}$$

ossia :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{\bar{x}\bar{x}} + \sigma_{\bar{y}\bar{y}} + \sigma_{\bar{z}\bar{z}}$$

ecc.

Per questa ragione, i coefficienti $I_{\sigma}, II_{\sigma}, III_{\sigma}$ sono denominati, rispettivamente, primo, secondo e terzo invariante della tensione.

L'equazione (*) dà luogo a tre radici $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$; si può dimostrare che esse sono reali. È lecito quindi ordinare ad es. così: $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$.
 In corrispondenza di ognuna di esse il sistema (6°) ammette (infinito) soluzioni non nulle. Tra di esse dovranno essere scelte quelle (o quella) che soddisfanno la

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Quindi, in generale:

alla radice	σ_I	è associata la soluzione	n_{xI}, n_{yI}, n_{zI}
"	"	"	"
"	σ_{II}	"	$n_{xII}, n_{yII}, n_{zII}$
"	"	"	"
"	σ_{III}	"	$n_{xIII}, n_{yIII}, n_{zIII}$
"	"	"	"

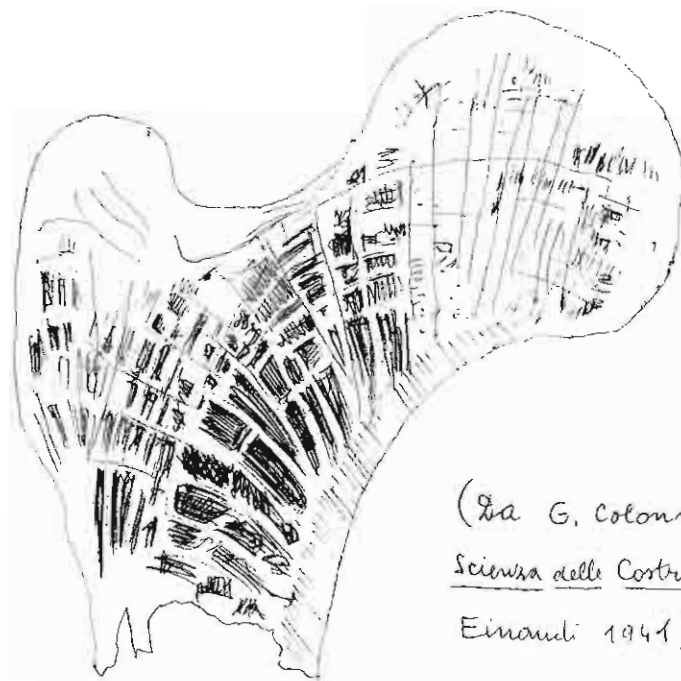
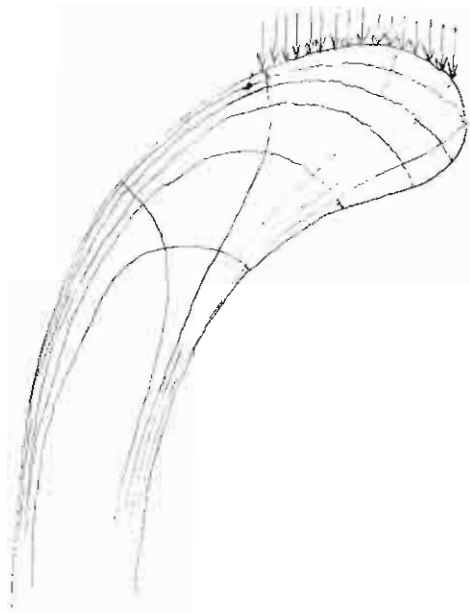
I coseni n_{xI}, n_{yI}, n_{zI} definiscono la 1^a direzione principale \vec{n}_I : sulla faccia normale a \vec{n}_I opera la tensione σ_I che prende il nome di 1^a tensione principale. Analogamente $n_{xII}, n_{yII}, n_{zII}$ e $n_{xIII}, n_{yIII}, n_{zIII}$ definiscono la 2^a e la 3^a direzione principali $\vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$ relative rispettivamente alla seconda e alla terza tensione principale $\sigma_{II}, \sigma_{III}$.

Si può dimostrare che è:

$$\vec{n}_I \perp \vec{n}_{II}, \quad \vec{n}_{II} \perp \vec{n}_{III}, \quad \vec{n}_I \perp \vec{n}_{III}$$

Se $\sigma_{III} \neq 0$ le tre tensioni principali risultano diverse da zero e caratterizzano uno stato di tensione denominato triaassiale. Quando invece $\sigma_{III} = 0$, almeno una tensione principale risulta nulla: lo stato di tensione corrispondente viene detto biassiale se caratterizzato da due tensioni principali diverse da zero ($\sigma_{II} \neq 0$), monoassiale, se da una sola tensione principale diversa da zero ($\sigma_{II} = 0$).

Le normali ai piani principali costituiscono in ogni punto del continuo una terna di direzioni principali che hanno in generale determinazione diversa da punto a punto ed involuppano tre congruenze curvilinee mutualmente ortogonali dette linee isostatiche. Secondo le tangenti alle isostatiche si hanno quindi per definizione solo tensioni normali: la conoscenza delle isostatiche permette



(Da G. Colometti :
Scienza delle Costruzioni
Einaudi 1941)

rebbe di concentrare la materia costituente il continuo in modo da realizzare esclusivamente sollecitazioni di trazione e compressioni, escludendo ogni azione delle tensioni tangenziali, che di regola comportano condizioni più sfavorevoli nel cimento del materiale.

In natura esistono esempi suggestivi di strutture organiche nelle quali le fibre resistenti hanno l'andamento delle linee isotatiche: classica è l'analisi sulla disposizione delle trabecole ossee nel femore umano".

(Cfr. R. Baldacci, I, p. 43).

Dal punto di vista storico si può osservare che Cauchy pervenne alla definizione delle direzioni principali e delle tensioni principali per una via più direttamente geometrica, introducendo la quadrica della tensione. Questa è ottenuta ad esempio dalla () di p. ponendo i coseni nella forma:

$$n_{x\bar{x}} = \frac{x}{R}, \quad n_{y\bar{x}} = \frac{y}{R}, \quad n_{z\bar{x}} = \frac{z}{R}$$

Risulta:

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} R^2 = \sigma_{xx} x^2 + \sigma_{yy} y^2 + \sigma_{zz} z^2 + 2\sigma_{xy} xy + 2\sigma_{xz} xz + 2\sigma_{yz} yz$$

Cauchy considera appunto la quadrica:

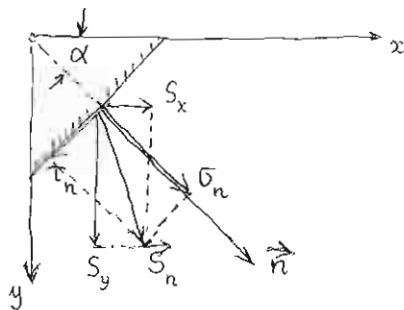
$$f(x, y, z) = \sigma_{xx} x^2 + \sigma_{yy} y^2 + \sigma_{zz} z^2 + 2\sigma_{xy} xy + 2\sigma_{xz} xz + 2\sigma_{yz} yz \pm \sigma_{\bar{x}\bar{x}} R^2 = 0$$

(*)

dove il segno \pm deve essere scelto in modo che $l_n(x)$ rappresenti una superficie reale. La ricerca delle tensioni principali e delle direzioni principali si riconduce allora al problema di riduzione della quadrica a forma canonica.

5.5. Il contributo di O. Mohr alla determinazione delle tensioni e delle direzioni principali.

Prima di abbandonare questo argomento, ricordiamo un metodo grafico-analitico assai utile per la determinazione delle tensioni principali e delle direzioni principali dovuto a O. Mohr (1835, 1918), un autore del quale parleremo più diffusamente in seguito. Riferiamoci al caso di uno stato di tensione biassiale ($\sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{zz} = 0$).



Considerata una giacitura generica caratterizzata da normale \vec{n} (vedi figura), le formule () di pag. si particolarizzano nelle seguenti:

$$\begin{cases} \sigma_n = S_x \cos \alpha + S_y \sin \alpha \\ \tau_n = -S_x \sin \alpha + S_y \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_x = \sigma_{xx} \cos \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha \\ S_y = \sigma_{xy} \cos \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{cases} \sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2 \alpha + \sigma_{yx} \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} \cos \alpha \sin \alpha + \sigma_{yy} \sin^2 \alpha \\ \tau_n = -\sigma_{xx} \cos \alpha \sin \alpha - \sigma_{yx} \sin^2 \alpha + \sigma_{xy} \cos^2 \alpha + \sigma_{yy} \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}$$

Pertanto:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \sin^2 \alpha - \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \sin^2 \alpha + 2\sigma_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \\ \tau_n = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha + \sigma_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \end{cases}$$

E quindi:

$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_n = -\frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha + \sigma_{xy} \cos 2\alpha \end{cases} \quad [0]$$

Ora le [0] rappresentano nel piano (σ_n, τ_n) le equazioni parametriche di un cerchio. Se ne può ottenere l'equazione cartesiana svolgendo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} \left(\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right)^2 &= \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 \cos^2 2\alpha + \sigma_{xy}^2 \sin^2 2\alpha + (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sigma_{xy} \cos 2\alpha \sin 2\alpha \\ \tau_n^2 &= \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 \sin^2 2\alpha + \sigma_{xy}^2 \cos^2 2\alpha - (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\sigma_{xy} \sin 2\alpha \cos 2\alpha \end{aligned}$$

↓

$$\boxed{\left(\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \right)^2 + \tau_n^2 = \frac{1}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xy}^2}$$

Si riconosce che il centro C del cerchio è definito dalle coordinate:

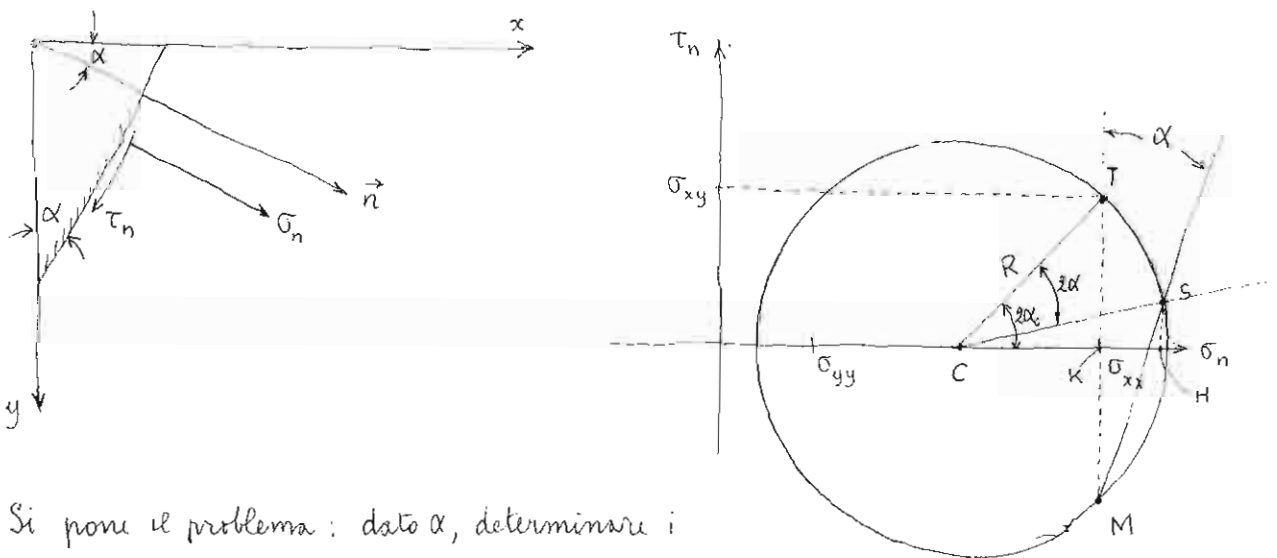
$$C \equiv \left(\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}), 0 \right)$$

e il raggio R della espressione:

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Il cerchio così introdotto prende il nome di "Cerchio di Mohr".

Dalle [0] segue cioè che al variare di α , le determinazioni corrispondenti di σ_n, τ_n si situano sul cerchio di Mohr nel piano (σ_n, τ_n) : i punti del cerchio rappresentano tutte le possibili determinazioni delle componenti di tensione al variare di α .



Si pone il problema: dato α , determinare i valori corrispondenti di σ_n, τ_n . La soluzione è immediata: supposto, per fissare le idee, che $\sigma_{xx} > \sigma_{yy} > 0$, $\sigma_{xy} > 0$, e tracciato il cerchio come in figura, si definisca anzitutto il punto $M = (\sigma_{xx}, -\sigma_{xy})$ detto "polo della

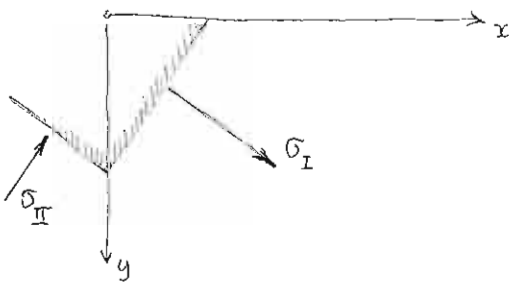
rappresentazione. Per determinare σ_n, τ_n basta tracciare la retta parallela alla traccia del piano di normale \vec{n} (notare che l'asse x è parallelo all'asse delle σ_n , e l'asse y ha la stessa direzione e opposto verso dell'asse delle τ_n). Ebbene, il punto di intersezione di tale retta con il cerchio di Mohr ha per coordinate i valori di σ_n, τ_n richiesti.

La dimostrazione si vale di semplici considerazioni geometriche; si ha infatti:

$$\begin{aligned} OH &= OC + CH = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + R \cos(2\alpha_0 - 2\alpha) = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + R(\cos 2\alpha_0 \cos 2\alpha + \sin 2\alpha_0 \sin 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + CK \cos 2\alpha + TK \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\alpha + \sigma_{xy} \sin 2\alpha = \sigma_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} SH &= R \sin(2\alpha_0 - 2\alpha) = R(\sin 2\alpha_0 \cos 2\alpha - \cos 2\alpha_0 \sin 2\alpha) \\ &= TK \cos 2\alpha - CK \sin 2\alpha = \sigma_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin 2\alpha = \tau_n \end{aligned}$$

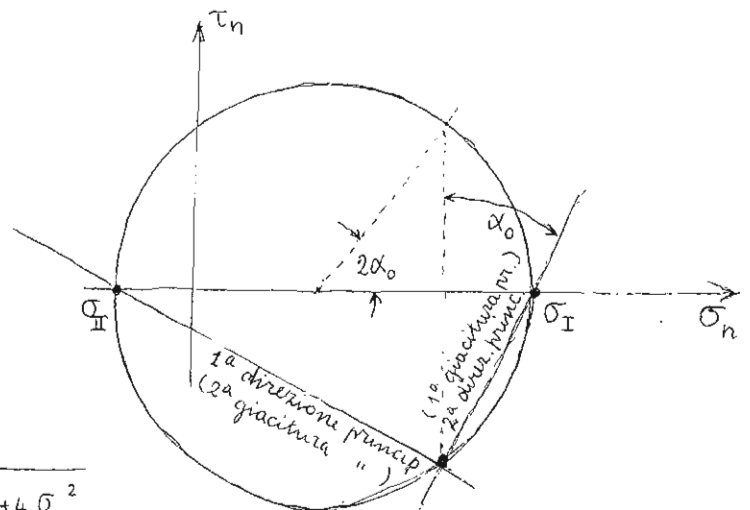
Con l'ausilio del cerchio di Mohr è possibile determinare graficamente le direzioni principali e le tensioni principali (vedi fig.)



Si ha:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

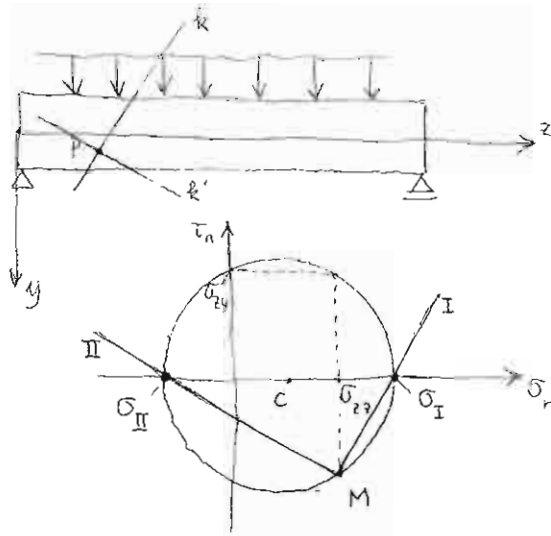


[X]

(notare che la costruzione grafica conferma l'ortogonalità delle direzioni principali).

Applicazioni

1)



Le componenti non nulle della tensione in P sono σ_{zz}, σ_{zy} .

Lo stato di tensione è biassiale

Le direzioni principali in P sono determinate dalle parallele a MI e a MII. Sulla giacitura di traccia Pk la tensione

è positiva e vale σ_I ; sulla giacitura di traccia Pk' la tensione è negativa e vale σ_{II} .



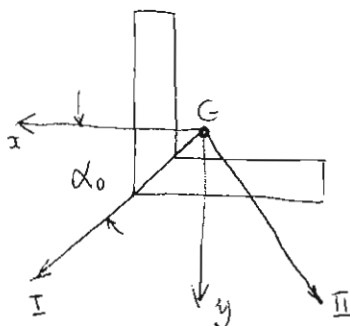
[Considerazioni sull'andamento delle possibili fessurazioni ed es. in una trave c.a.]

2)

Per determinare i momenti principali di inerzia di una sezione, si può osservare che le quantità $J_x, J_y, -J_{xy}$ seguono le stesse leggi di trasformazione (alla rotazione degli assi x, y) delle componenti di tensione $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$. Pertanto si possono dedurre formule analoghe alle [X] di pag. per la determinazione dei momenti principali J_I, J_{II} :

$$\left. \begin{matrix} J_I \\ J_{II} \end{matrix} \right\} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}$$

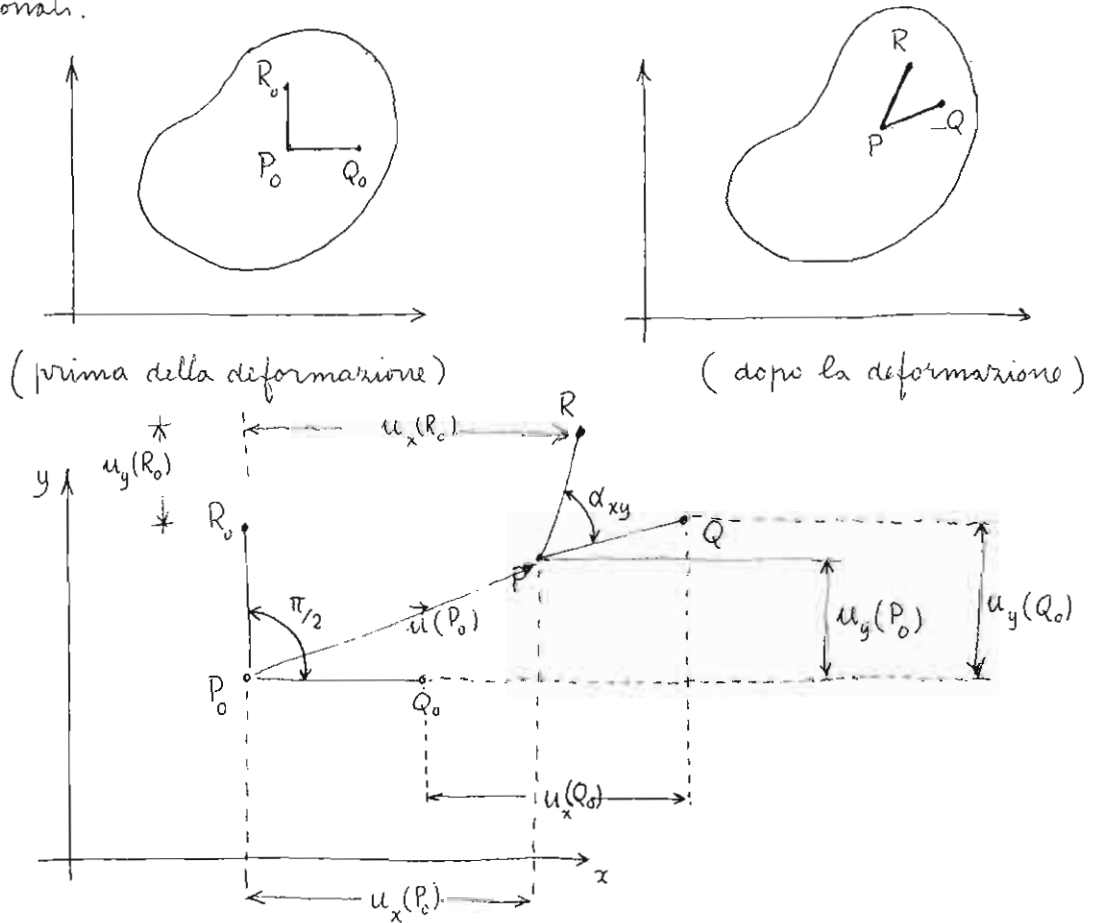
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}$$



5.6. Agostino Cauchy - L'analisi della deformazione.

Ci limiteremo a citare i contributi di Cauchy alla teoria infinitesimale: ossia alla teoria che studia la deformazione nel caso in cui sia le funzioni che esprimono lo spostamento dallo stato indeformato a quello deformato, sia le derivate dello spostamenti siano infinitesime (nel senso già chiarito).

Mentre per lo studio della tensione era opportuno riferirci a un tetraedro o a un parallelepipedo infinitesimi, per lo studio della deformazione è sufficiente considerare due elementi lineari infinitesimi, mutuamente ortogonali.



Per ogni punto P_0 si può definire lo spostamento di P_0 come il vettore che congiunge P_0 con il punto P in cui P_0 si porta. Con ciò sono definite tre funzioni

$$u_x(x, y, z), \quad u_y(x, y, z), \quad u_z(x, y, z)$$

espressive delle tre componenti dello spostamento \vec{u} .

Supporremo che tali funzioni siano continue e derivabili quanto occorre, oltre che infinitesime con le derivate.

Definiamo anzitutto la dilatazione lineare in P_0 secondo la direzione x :

$$(\epsilon_{xx})_{P_0} = \frac{\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0}}{\overline{P_0Q_0}} \quad (*) \quad \left(\text{analogamente si procederà secondo la dirz. degli assi } y, \text{ e } z \right).$$

Se gli spostamenti sono infinitesimi si può dire che:

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= dx + u_x(Q_0) - u_x(P_0) = dx + u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0} dx - u_x(P_0) \\ &= dx \left(1 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0}\right) \end{aligned}$$

E' poi:

$$\overline{P_0Q_0} = dx$$

Pertanto si può trasformare la (*) secondo la:

$$(\epsilon_{xx})_{P_0} = \frac{\overline{PQ} - \overline{P_0Q_0}}{\overline{P_0Q_0}} = \frac{dx \left(1 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0}\right) - dx}{dx} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_{P_0}$$

In generale, dunque, la dilatazione lineare nelle tre direzioni x, y, z è descritta dalle:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Definiamo ora lo scorrimento angolare γ_{xy} in P_0 secondo la:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \alpha_{xy}$$

Si ha dunque, se gli spostamenti sono infinitesimi:

$$(\gamma_{xy})_{P_0} \cong \frac{u_y(Q_0) - u_y(P_0)}{\overline{P_0Q_0}} + \frac{u_x(R_0) - u_x(P_0)}{\overline{P_0R_0}}$$

Ma è:

$$u_y(Q_0) = u_y(P_0) + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_{P_0} dx + \dots$$

$$u_x(R_0) = u_x(P_0) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{P_0} dy + \dots$$

$$\overline{P_0Q_0} = dx$$

$$\overline{P_0R_0} = dy$$

Pertanto :

$$(\gamma_{xy})_{P_0} = \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{P_0} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} \right)_{P_0}$$

Ovviamente si ha : $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$

In generale :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

Se ora definiamo le componenti a indici distinte della deformazione secondo le :

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad , \quad \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz} \quad , \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \gamma_{yz}$$

otteniamo che sia le componenti a indici uguali, sia quelle a indici distinti sono tutte descritte dalla relazione :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad (\Delta)$$

dove $i, j = x, y, z$.

Le (Δ) correlano le componenti di spostamento u_x, u_y, u_z con le componenti della deformazione $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{xy} (= \epsilon_{yx}), \epsilon_{xz} (= \epsilon_{zx}), \epsilon_{yz} (= \epsilon_{zy})$. Se si suppone che gli spostamenti siano funzioni continue derivabili assegnate, allora le (Δ) assumono l'aspetto di definizioni per le componenti di deformazione e queste sono sempre ottenibili effettuando le derivazioni indicate nelle (Δ) .

Ci si può proporre però il problema inverso : siano assegnate sei funzioni come rappresentative di $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots, \epsilon_{yz}$. E' possibile assegnare ad esse tre funzioni continue e derivabili u_x, u_y, u_z che soddisfino le (Δ) ?

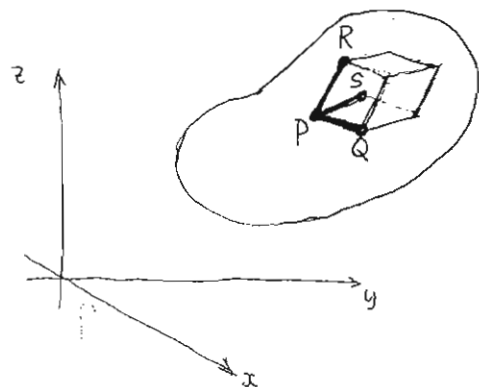
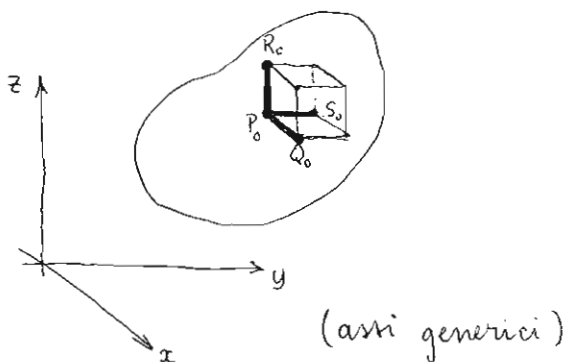
La risposta in generale è negativa. Se le funzioni $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots$ non sono opportunamente scelte, le equazioni (Δ) , intese, questa volta, come sistema di equazioni differenziali nelle incognite u_x, u_y, u_z , non ammettono soluzione.

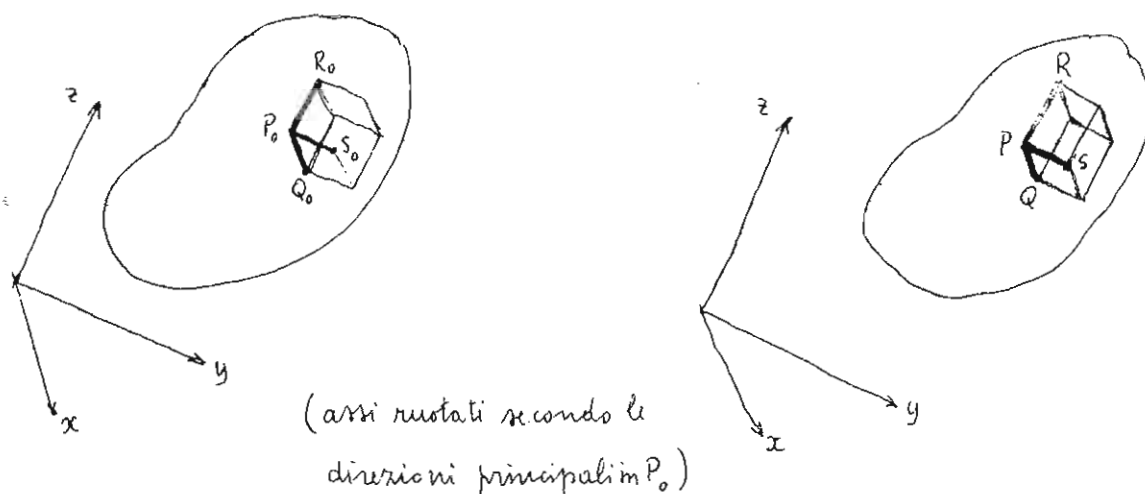
Le (Δ) non esplicano dunque soltanto il ruolo di definizioni delle ϵ_{ij} , ma indicano anche, implicitamente, che le quantità espressive della deformazione non possono essere assegnate arbitrariamente poiché son legate alla integrabilità delle (Δ) . Se le ϵ_{ij} rendono integrabili le (Δ) si dice che esse sono congruenti. E le (Δ) vengono indicate con la denominazione di equazioni di congruenza.

Deformazioni principali e direzioni principali della deformazione

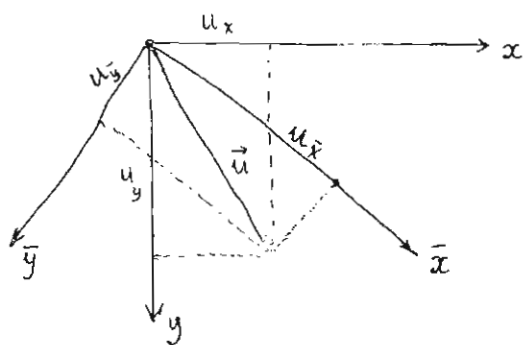
Le componenti $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \dots$ costituiscono ancora un "tensore" doppio (a due indici) simmetrico. Utilizzando questa osservazione (che potrebbe essere motivata con tutto rigore) si può trattare la deformazione in modo analogo alla tensione. Anche per la deformazione si possono ricercare le deformazioni principali e le relative direzioni principali.

Si è veduto sopra che le componenti a indici uguali $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ misurano la dilatazione lineare di elementi lineari infinitesimi inizialmente paralleli all'asse x , o all'asse y , o all'asse z ; invece le componenti a indici distinti $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ misurano lo scorrimento angolare tra due elementi lineari inizialmente perpendicolari e paralleli a x e a y , o a x e a z , o a y e a z . Riccerchiamo ora una opportuna rotazione degli assi x, y, z , in modo che, rispetto agli assi ruotati, le componenti a indici distinti della deformazione in un punto P siano nulle. Ciò vuol dire ricercare le direzioni di tre elementi infinitesimi lineari uscenti da P e tra loro perpendicolari che, nel corso della deformazione, non subiscano scorrimenti angolari, ma soltanto dilatazioni lineari.





Il procedimento per ottenere tali tre direzioni, dette direzioni principali della deformazione in P_0 , e le corrispondenti dilatazioni lineari, dette deformazioni principali, è lo stesso già seguito per la ricerca delle tensioni principali e delle direzioni principali della tensione. La ragione di questa analogia formale sta nel fatto che al ruotare degli assi, le componenti della deformazione si trasformano con la stessa legge che abbiamo riconosciuta per le tensioni.



Consideriamo ad esempio la componente $\epsilon_{\bar{x}\bar{x}}$ rispetto agli assi $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Si ha anzitutto:

$$u_{\bar{x}} = u_x n_{x\bar{x}} + u_y n_{y\bar{x}} + u_z n_{z\bar{x}} \quad (\text{ecc.})$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} \\ &= \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial x} n_{x\bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial y} n_{y\bar{x}} + \frac{\partial u_{\bar{x}}}{\partial z} n_{z\bar{x}} \\ &= \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} n_{x\bar{x}} + \frac{\partial u_y}{\partial x} n_{y\bar{x}} + \frac{\partial u_z}{\partial x} n_{z\bar{x}} \right) n_{x\bar{x}} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} n_{x\bar{x}} + \frac{\partial u_y}{\partial y} n_{y\bar{x}} + \frac{\partial u_z}{\partial y} n_{z\bar{x}} \right) n_{y\bar{x}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} n_{x\bar{x}} + \frac{\partial u_y}{\partial z} n_{y\bar{x}} + \frac{\partial u_z}{\partial z} n_{z\bar{x}} \right) n_{z\bar{x}} \\ &= \epsilon_{xx} n_{x\bar{x}}^2 + \epsilon_{yy} n_{y\bar{x}}^2 + \epsilon_{zz} n_{z\bar{x}}^2 + 2\epsilon_{xy} n_{x\bar{x}} n_{y\bar{x}} + 2\epsilon_{xz} n_{x\bar{x}} n_{z\bar{x}} \\ &\quad + \epsilon_{yz} n_{z\bar{x}} n_{y\bar{x}} \end{aligned}$$

In modo simile, si procede per le altre componenti; l'identità formale con le formole (6) di pag. 98 ottenute per le componenti di tensione è completa.

Possiamo allora affermare che le equazioni che determinano le direzioni principali della deformazione e le deformazioni principali sono formalmente identiche a quelle già dedotte per la tensione. Ossia:

$$\begin{cases} (\epsilon_{xx} - \epsilon) n_x + \epsilon_{yx} n_y + \epsilon_{zx} n_z = 0 \\ \epsilon_{xy} n_x + (\epsilon_{yy} - \epsilon) n_y + \epsilon_{zy} n_z = 0 \\ \epsilon_{xz} n_x + \epsilon_{yz} n_y + (\epsilon_{zz} - \epsilon) n_z = 0 \end{cases} \quad (o)$$

Affinchi esistano soluzioni non tutte nulle per n_x, n_y, n_z occorre imporre che sia nullo il determinante dei coefficienti:

$$\det \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} - \epsilon & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} - \epsilon \end{bmatrix} = 0$$

Cioè:

$$\epsilon^3 - \bar{I}_\epsilon \epsilon^2 + \bar{II}_\epsilon \epsilon - \bar{III}_\epsilon = 0 \quad (*)$$

dove le quantità:

$$\bar{I}_\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$$

$$\bar{II}_\epsilon = \epsilon_{xx}\epsilon_{yy} + \epsilon_{xx}\epsilon_{zz} + \epsilon_{yy}\epsilon_{zz} - \epsilon_{xy}^2 - \epsilon_{xz}^2 - \epsilon_{yz}^2$$

$$\bar{III}_\epsilon = \det [\epsilon_{ij}]$$

sono (gli) invarianti della deformazione. L'equazione (*) dà luogo a tre radici reali $\epsilon_I, \epsilon_{II}, \epsilon_{III}$ ($\epsilon_I \geq \epsilon_{II} \geq \epsilon_{III}$). E in corrispondenza di esse il sistema (o) ammette soluzioni non nulle ulteriormente determinate dalla condizione trigonometrica:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Quindi in generale:

$$\begin{aligned} \epsilon_I &\longrightarrow \vec{n}_I = \begin{cases} n_{xI} \\ n_{yI} \\ n_{zI} \end{cases} \\ \epsilon_{II} &\longrightarrow \vec{n}_{II} = \begin{cases} n_{xII} \\ n_{yII} \\ n_{zII} \end{cases} \\ \epsilon_{III} &\longrightarrow \vec{n}_{III} = \begin{cases} n_{xIII} \\ n_{yIII} \\ n_{zIII} \end{cases} \end{aligned}$$

4) i coseni n_{xI}, n_{yI}, n_{zI} definiscono la prima direzione principale \vec{n}_I della deformazione cui attiene la deformazione principale ϵ_I ; similmente $n_{xII}, n_{yII}, n_{zII}$ e $n_{xIII}, n_{yIII}, n_{zIII}$ definiscono la seconda e la terza direzione principale $\vec{n}_{II}, \vec{n}_{III}$ relative a ϵ_{II} , e a ϵ_{III} rispettivamente.

Si dimostra ancora che è:

$$\vec{n}_I \perp \vec{n}_{II}, \quad \vec{n}_I \perp \vec{n}_{III}, \quad \vec{n}_{II} \perp \vec{n}_{III}$$

5.7. Agostino Cauchy. Il problema elastico.

A Cauchy si deve finalmente una prima importante sistemazione delle equazioni che descrivono il legame elastico. Limiteremo qui il discorso esclusivamente a quel che sarà successivamente utilizzato nelle applicazioni.

Il comportamento di un materiale è definito elastico se lo stato di tensione all'istante generico t dipende soltanto dalla configurazione locale in quell'istante e non dall'intera "storia" precedente (del moto). Una variazione della tensione si produce solo in risposta a una variazione della deformazione e il materiale è insensibile al modo con cui tale variazione è avvenuta nello spazio e nel tempo.

L'equazione costitutiva di un materiale elastico è dunque della forma:

$$\sigma_{xx} = \mathbb{G}_{xx}(\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \dots, \epsilon_{zz}; x, y, z; t) \quad (*)$$

(e analoghe)

Una particolare importanza applicativa riveste il caso di comportamento lineare nel quale le funzioni \mathbb{G} si particolarizzano nelle espressioni:

$$\sigma_{xx} = E_{xxxx} \epsilon_{xx} + E_{xxyy} \epsilon_{yy} + \dots + E_{xxzz} \epsilon_{zz}$$

$$\sigma_{xy} = E_{xyxx} \epsilon_{xx} + E_{xyxy} \epsilon_{xy} + \dots + E_{xyzz} \epsilon_{zz}$$

(e analoghe)

dove i coefficienti E_{ijpq} ($i, j, p, q = x, y, z$) non dipendono dalla deformazione ma solo, eventualmente, dalla posizione della particella materiale (materiale

eterogeneo). L'indipendenza delle E_{ijpq} dalle coordinate x, y, z caratterizza il comportamento di un materiale elastico (lineare) omogeneo. Per la simmetria di σ_{ij} e di ϵ_{ij} , i coefficienti E_{ijpq} si riducono a 36 effettivamente distinti.

Nella definizione generale di uno stato elastico espressa dalle (x), sia le componenti di deformazione ϵ_{ij} sia le componenti di tensione σ_{ij} dipendono dalla scelta del sistema di riferimento e in particolare da una rotazione della terna ortogonale x, y, z . Appare quindi chiaro come le funzioni σ_{ij} che caratterizzano la risposta elastica, e le "elasticità" E_{ijpq} in generale non conservino la stessa forma rispetto ad una rotazione del riferimento che porti la terna x, y, z in una nuova terna $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Nel caso particolare in cui la "forma" delle funzioni di risposta σ_{ij} sia insensibile ad una rotazione del riferimento materiale x, y, z , diremo che lo stato elastico è isotropo.

Cauchy ottiene la forma generale del legame elastico lineare isotropo imponendo che le direzioni principali della tensione coincidano con quelle della deformazione.

Si può pervenire alla relazione voluta esprimendo dapprima per un corpo elastico isotropo in generale non lineare la dipendenza tra la tensione e la deformazione nel seguente modo. Definite le matrici:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

il legame tensione - deformazione può essere rappresentato sinteticamente mediante una relazione matriciale del tipo:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = C_0 (\mathbb{I}_\epsilon, \mathbb{II}_\epsilon, \mathbb{III}_\epsilon) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + C_1 (\mathbb{I}_\epsilon, \mathbb{II}_\epsilon, \mathbb{III}_\epsilon) \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} + C_2 (\mathbb{I}_\epsilon, \mathbb{II}_\epsilon, \mathbb{III}_\epsilon) \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}^2 + \dots$$

Se i coefficienti $C_0(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon)$, $C_1(I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon), \dots$ dipendono solo dagli invarianti della deformazione, l'isotropia è garantita, poiché il legame $\sigma \rightarrow \varepsilon$ conserva la stessa forma rispetto a una rotazione del riferimento.

A questo punto introduciamo l'ipotesi di linearità: allora C_0 potrà dipendere solo linearmente da I_ε secondo la:

$$C_0 = \lambda I_\varepsilon \quad (\lambda: \text{costante})$$

e C_1 dovrà essere una costante; ovvero:

$$C_1 = 2G$$

Certanto la (*) si traduce nella:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \lambda I_\varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ovvero, in forma distesa:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{xy} &= 2G \varepsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} &= 2G \varepsilon_{xz} \\ \sigma_{yy} &= \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{yz} &= 2G \varepsilon_{yz} \\ \sigma_{zz} &= \lambda (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (5)$$

Il coefficiente G prende il nome di "modulo tangenziale di elasticità".

Queste equazioni sono state scritte nella presente forma da G. Larmé
"Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides"
Paris 1852.

Spesso è conveniente esprimere il legame $\sigma - \varepsilon$ in senso inverso.

Si ottiene allora:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{xz} \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2G} \sigma_{yz} \end{aligned} \quad (\dagger)$$

dove il coefficiente ν (introdotto, come vedremo, da Poisson) è legato a λ e a G dalla:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$$

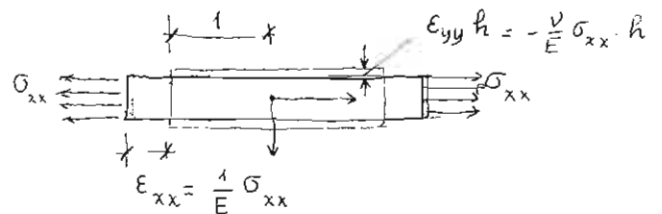
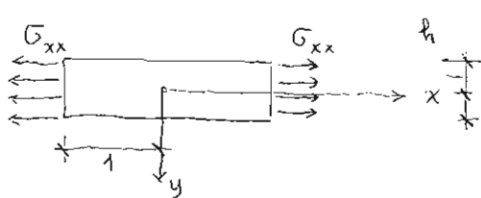
mentre il coefficiente E rappresenta il modulo di elasticità normale di Young che già conosciamo. Esso è legato a λ e a G dalla:

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$$

Si ha anche:

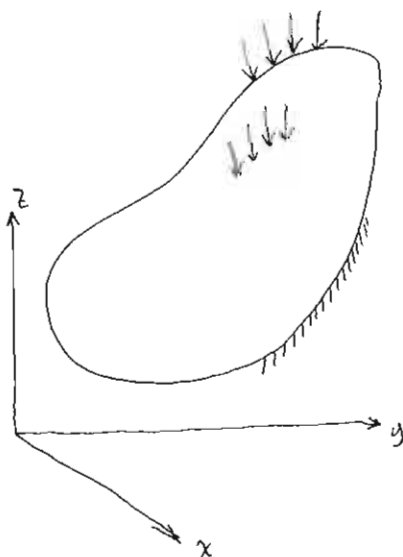
$$E = 2(1 + \nu)G$$

La semplice lettura delle (†) mostra il significato dei coefficienti di Poisson ν : ν rappresenta la "contrazione laterale".



Equazioni di equilibrio in termini di spostamento.

Elenchiamo tutte le equazioni valide nei punti interni del corpo elastico.



Equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{cases} \quad (A)$$

Equazioni di congruenza

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \epsilon_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \epsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (B)$$

Equazioni di legame elastico

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= \lambda I_\epsilon + 2G \epsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} &= \lambda I_\epsilon + 2G \epsilon_{yy} \\
 \sigma_{zz} &= \lambda I_\epsilon + 2G \epsilon_{zz} \\
 \sigma_{xy} &= 2G \epsilon_{xy} \\
 \sigma_{xz} &= 2G \epsilon_{xz} \\
 \sigma_{yz} &= 2G \epsilon_{yz}
 \end{aligned} \tag{c}$$

(Le eq. di congruenza e di legame, ovviamente, valgono ovunque)..

Al contorno occorre distinguere la porzione di esso in cui sono assegnati gli spostamenti:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= \bar{u}_x(x, y, z) & u_y(x, y, z) &= \bar{u}_y(x, y, z) \\
 u_z(x, y, z) &= \bar{u}_z(x, y, z)
 \end{aligned}$$

e la porzione in cui sono assegnate le forze f_x, f_y, f_z . In tale porzione valgono le equazioni:

$$\begin{aligned}
 f_x &= \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z \\
 f_y &= \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z \\
 f_z &= \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z
 \end{aligned}$$

Componendo le diverse equazioni (A), (B), (C), ossia sostituendo le (C) nelle (A) e successivamente tenendo conto delle (B) si ottengono in definitiva le seguenti tre equazioni di equilibrio in termini di spostamento:

$$\begin{aligned}
 G \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_x &= 0 \\
 G \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_y &= 0 \\
 G \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + (\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + F_z &= 0
 \end{aligned}$$

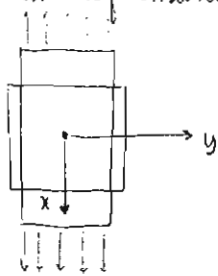
le quali riproducono le equazioni di Navier (vedi pag. 90) nel caso in cui le costanti elastiche per il corpo elastico lineare isotropo siano due (ades. G, λ).

la controversia sulle costanti elastiche

Navier riteneva che un corpo elastico ideale consista di molecole tra le quali sorgano forze dovute alla deformazione: tali forze erano da N. supposte proporzionali ai cambiamenti di distanza tra le molecole e dirette secondo il segmento che le congiunge. In questo modo Navier fu in grado di stabilire le relazioni tra le deformazioni e le forze elastiche per corpi isotropi usando una sola costante elastica. Cauchy usò inizialmente due costanti ($\lambda, 2G$) per le relazioni generali tra tensione e deformazione nel caso di isotropia.

Per i corpi anisotropi, Poisson e Cauchy introdussero dapprima 36 costanti elastiche ($E_{xxxx}, E_{xxxy}, \dots$); procedendo nell'ambito della teoria molecolare (alla Navier), essi ridussero questo numero a 15 nel caso generale, e mostrarono che l'isotropia obbliga ulteriormente ad ammettere una sola costante, come aveva già detto Navier.

Poisson, d'altra parte, si rese conto del fatto che in semplice tensione di un provino isotropo, si rende evidente una contrazione laterale; ossia, se ϵ_{xx} è la deformazione connessa con la tensione, lateralmente sorgono deformazioni $\epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}$ pari a $-\nu \epsilon_{xx}$. Come si è già menzionato, il coefficiente ν prende appunto la denominazione di "coefficiente di Poisson".



Seguendo la teoria molecole, ad esempio dal confronto tra le equazioni di Navier e le (), si dovrebbe concludere che $\nu = 0,25$ e che il modulo di elasticità tangenziale G è offerto da:

$$G = \frac{E}{2(1+0,25)} = 0,4 E$$

Questa tesi sostenuta da Poisson, per la quale le proprietà elastiche di un corpo isotropo sono completamente definite da una costante (ad es. E) fu generalmente accettata nel primo avviarsi della teoria matematica della elasticità, da Navier, da Cauchy, da Poisson, da Lamé, da Clapeyron.

Una notevole modifica di importanza fu promossa da G. Green, il quale diede una derivazione delle equazioni di elasticità senza usare alcuna

ipotesi riguardante il comportamento della struttura molecolare dei corpi elastici.

Giorgio Green (1793-1841), Figlio di un mugnaio di Nottingham - Autodidatta. Nel 1828 il 1° lavoro: "An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism". Nel 1833 entra nel Gonville and Caius College dell'Università di Cambridge. Nel 1837, diventa bachelor of arts. Nel 1839 fellow.

Nel lavoro del 1828 Green utilizza per primo nella teoria dell'elasticità il concetto di energia potenziale che era già stato introdotto da Laplace. Green non vuole fare ipotesi sull'azione mutua delle molecole ma si limita ad assumere che le proprietà del corpo elastico siano compatibili col principio di conservazione dell'energia. Ripetiamo il suo ragionamento:

"If (...) we are so perfectly ignorant of the mode of action of the elements of the luminiferous ether on each other (...) it would seem a safer method to take some general physical principle as the basis of our reasoning, rather than assume certain modes of action, which, after all, may be widely different from the mechanism employed by nature; more especially if this principle includes in itself, as a particular case, those before used by M. Cauchy and others, and also leads to a much more simple process of calculation. The principle selected as the basis of the reasoning contained in the following paper is this: In whatever way the elements of any material system may act upon each other, if all the internal forces exerted be multiplied by the elements of their respective directions, the total sum for any assigned portion of the mass will always be the exact differential of some function".

Ora l'energia sviluppata per unità di volume in corrispondenza di una variazione infinitesima della deformazione $\bar{\epsilon}$ data da:

$$d\phi = \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad (i,j = x,y,z) \quad (1)$$

La compatibilità con il principio di conservazione dell'energia impone dunque che l'incremento dell'energia (\cdot) sia un differenziale esatto.

Pertanto deve essere:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

Se dunque si suppone che:

$$\sigma_{ij} = \sum_{p,q} E_{ijpq} \varepsilon_{pq} \quad (i, j, p, q = x, y, z)$$

la corrispondente espressione dell'energia potenziale $\bar{\varepsilon}$ è:

$$\phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,p,q} E_{ijpq} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pq}$$

Essendo:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} = E_{ijpq} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{pq}}$$

si dovrà anche avere:

$$\frac{\partial \sigma_{pq}}{\partial \varepsilon_{ij}} = E_{pqij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varepsilon_{pq} \partial \varepsilon_{ij}}$$

Ciò obbliga alle condizioni:

$$E_{ijpq} = E_{pqij}$$

Si tratta di 9 condizioni che riducono da 36 a 21 le costanti elastiche.

Nel caso isotropo si dovrà supporre che l'energia ϕ abbia una "struttura" invariante alle rotazioni degli assi, e che quindi si abbia:

$$\phi = \phi(I_E, II_E, III_E)$$

Se il corpo è lineare, l'energia ϕ deve essere funzione quadratica delle ε_{ij} . Ciò impone per ϕ la forma:

$$\phi = c_0 I_E^2 + c_1 II_E \quad (c_0, c_1 \text{ costanti})$$

Si conferma quindi che un corpo elastico lineare isotropo è caratterizzato da due costanti.

Il lavoro di Green diede origine a una controversia sulle costanti elastiche. Sorsero due scuole nello sviluppo della teoria dell'elasticità. Gli scienziati che seguivano la teoria molecolare usavano 15 costanti per il materiale anisotropo e 4 per il materiale isotropo; invece gli scienziati che seguivano Green optavano per 21 costanti nel caso generale e per 2 costanti nel caso isotropo.

La supremazia di una teoria sull'altra era legata ai risultati sperimentali; e questi in effetti confermarono la teoria di Green.

Furono appunto Wertheim e Chevandier che nel 1848 verificarono che gli esperimenti contraddicevano la previsione teorica di Poisson: $\nu = 0,25$, poiché per i materiali metallici era più appropriata la determinazione $\nu = 1/3$. [Va detto peraltro che il Wertheim, nonostante i risultati da lui ottenuti, continuò a sostenere la teoria molecolare].

In Germania la sperimentazione fu sviluppata da F. Neumann e da G.R. Kirchhoff. Quest'ultimo determinò accuratamente il coefficiente ν per l'acciaio (0,294) e per l'ottone (0,387).

Tali risultati erano in conflitto con l'ipotesi di una costante. Inoltre, tale ipotesi divenne sempre più incompatibile con le teorie che si venivano formando sulla costituzione della materia. Pertanto nella successiva maturazione della Teoria dell'elasticità, il metodo proposto da Green acquistò terreno sino ad essere universalmente accolto.

6. IL PROBLEMA DI SAINT-VENANT:
 ESTENSIONE - FLESSIONE, TORSIONE DEI PRISMI.
 JOURAWSKI: LA TEORIA APPROSSIMATA DEL
 TAGLIO.

6.1. Barri de Saint-Venant

1797. Nasce nel castello di Fortoiseau (Seine-et-Marne).
 Studia presso l'École Polytechnique. 1814. Manifesta
 i suoi sentimenti ostili verso Napoleone: è espulso dall'E.P.
 Per otto anni è costretto all'impiego di Assistente in una
 industria di polvere da sparo. 1823. Gli è consentito di tornare
 alla École des Ponts et Chaussées, ma subisce angherie e
 persecuzioni dai colleghi. 1825-30. lavora al canale di Nivernais.
 1834. lavora al canale delle Ardenne. 1837-38. Supplisce Coriolis
 all'École des Ponts et Ch. Segue e sviluppa il "Résumé des
 Leçons..." di Navier. Si occupa di Idraulica e di Agricoltura.
 1843. Memoria sulla flessione delle travi curve. 1847. 1ª memoria
 sulla torsione. 1855-56. Memorie fondamentali sulla
flessione e sulla torsione dei prismi (Mém. Savants étrangers,
 14, 223 (1855); Journal Math. Liouville (2), 1, 89 (1856)).
 Nonostante la fama acquisita in campo scientifico, continua
 a subire una certa emarginazione dovuta alle sue posizioni
 politiche. 1868. Presenta la storia delle equazioni di elasticità
 nel libro di Moigno "Leçons de Mécanique Analytique, Statique"
 [Moigno racconta che su questo argomento gli scienziati tedeschi
 e inglesi interpellati si rifiutarono di collaborare, dato che in
 Francia S. Venant doveva essere considerato l'autorità "per eccellenza"
 in materia]. 1868. Finalmente è eletto all'Accademia delle

scienze - Nel 1864 cura una nuova edizione del "Résumé" di Navier, apponendovi tali aggiunte da renderlo un trattato nuovo. Nel 1883 traduce il trattato di A. Clebsch (Theorie der Elastizität fester Körper). Muore nel 1886.

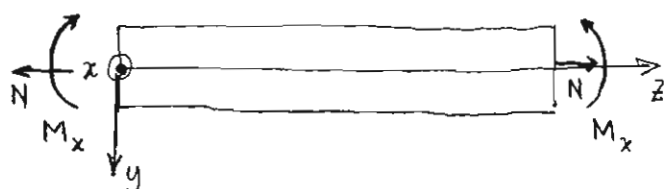
6.2. B. de Saint-Venant : contributi alla resistenza dei materiali.

La maggior parte dei contributi dati da Saint Venant alla resistenza dei materiali elementare è raccolta nelle note alla III edizione del libro di Navier "Résumé des leçons..." (Parigi, 1864) e nelle sue "dispense" litografate "Leçons de mécanique appliquée faites par intérim par M. de S. Venant" (1837-1838).

Con riferimento alla teoria della flessione, S. Venant esamina criticamente le ipotesi fondamentali, e cioè che le sezioni trasversali di una trave restano piane durante la deformazione e che le fibre longitudinali non esercitano mutualmente tensioni normali e sono in stato di semplice trazione o compressione.

Egli dimostra che queste due ipotesi sono soddisfatte rigorosamente solo nel caso di semplice flessione e in tal caso rispettano la congruenza. A Saint Venant si deve pertanto un'analisi completa della flessione (e più in generale, della press o tenso-flessione) delle travi anche sotto il profilo deformativo.

Consideriamo appunto una trave press o tenso inflessa per la quale lo stato di tensione è descritto dalla:

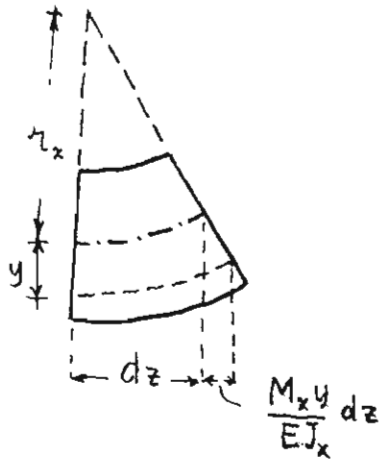


$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x} - \frac{M_y x}{J_y}$$

e quindi lo stato di deformazione dalla :

$$\varepsilon_{zz} = \frac{N}{EA} + \frac{M_x y}{EJ_x} - \frac{M_y x}{EJ_y}$$

Per studiare l'effetto deformativo di M_x poniamo $N = M_y = 0$.
Per ogni elemento di lunghezza infinitesima dz si può stabilire la proporzione (vedi la figura) :



$$\frac{M_x y}{EJ_x} dz : y = dz : r_x$$

da cui si ritrova la curvatura della trave "nel piano zy " :

$$\kappa_x = \frac{1}{r_x} = \frac{M_x}{EJ_x}$$

In modo analogo, considerando l'effetto deformativo di M_y , porremo $N = M_x = 0$. Si avrà per l'elemento dz , come sopra,

$$\frac{M_y x}{EJ_y} dz : x = dz : r_y$$

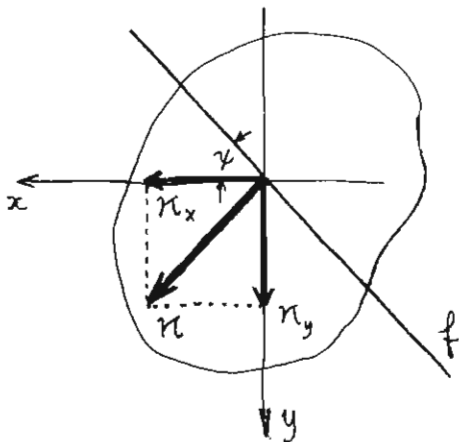
Quindi la curvatura "nel piano zx " sarà data da :

$$\kappa_y = \frac{1}{r_y} = \frac{M_y}{EJ_y}$$

Si osservi che sia κ_x , sia κ_y risultano costanti.

Componendo vettorialmente κ_x e κ_y si ottiene la

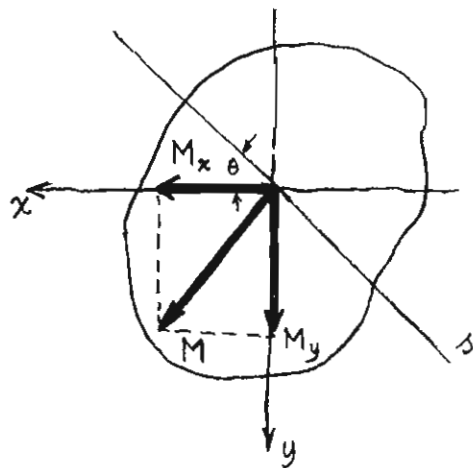
$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}$$



che misura l'inflessione nel piano di traccia f (vedi figura) : f prende appunto il nome di asse di flessione e designa il piano in cui si dispone la trave nella sua deformazione flessionale. La sua pendenza è data

dalla formola:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{M_x}{M_y} \frac{J_y}{J_x}$$



È interessante considerare, oltre ad f , la traccia s del piano su cui opera il momento flettente risultante da M_x e M_y : la retta s , detta asse di sollecitazione passa per il baricentro della generica sezione trasversale e la sua pendenza è definita dalla:

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{M_x}{M_y}$$

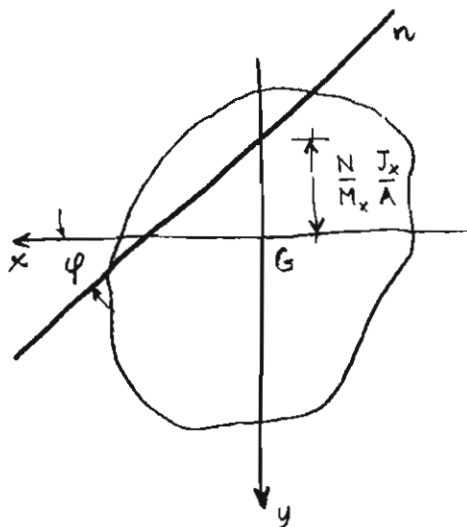
Si osserva allora che in generale la pendenza di s e quella di f non coincidono: cioè, in generale, la flessione della trave è deviata, nel senso che si dà una "deviazione" tra la giacitura su cui opera la sollecitazione $\vec{M} \equiv (M_x, M_y)$ e la giacitura su cui si colloca la trave inflessa. La flessione è invece retta, ossia verifica la coincidenza di f e di s , sia nel caso in cui il momento risultante \vec{M} operi su un piano "principale", di traccia x o y , sia nel caso in cui $J_x = J_y$.

A questo punto prendiamo in esame il terzo asse significativo nella teoria della pressoché tenso-flessione, già a suo tempo introdotto: l'asse neutro n . Come sappiamo, l'asse neutro è definito come il luogo dei punti in cui $\sigma_{zz} = 0$; la sua equazione è dunque:

$$y = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y} x - \frac{N}{M_x} \frac{J_x}{A}$$

La pendenza di n è dunque:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_x}{J_y}$$



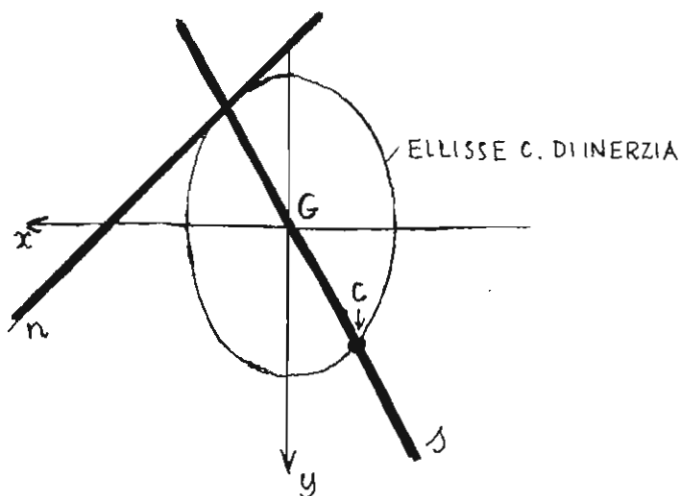
Si riconosce pertanto che l'asse neutro è sempre perpendicolare all'asse di flessione. Infatti si ha:

$$\operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \varphi = -1$$

Invece l'asse neutro è ortogonale all'asse di sollecitazione solo nel caso di flessione retta.

Sul punto di vista storico, i chiarimenti qui offerti alla teoria della (press-tenso) flessione sono particolarmente rilevanti. Navier credeva infatti che l'asse neutro fosse sempre perpendicolare all'asse di sollecitazione. Fu Bersy per primo a rendersi conto che tale proprietà era verificata solo se il piano su cui agisce il momento interseca la sezione trasversale della trave lungo uno dei due assi principali di inerzia.

A Saint Venant si deve la completa soluzione della questione nel caso generale: assegnato l'asse di sollecitazione, il quale, a sua volta è anche determinabile, noto il centro di sollecitazione C, come la retta passante per C e per G, si può definire la direzione dell'asse neutro con semplici considerazioni di geometria (vedi figura).



6.3. Il problema di Saint-Venant

Il maggior merito di Saint-Venant è quello di aver raccolto ad unità le considerazioni sinora svolte sulla pressa e tenso-flessione nell'ambito di una teoria generale aperta ad ulteriori sviluppi applicativi, riguardanti il caso di sollecitazioni a taglio e a momento torcente.

La ricerca di soluzioni rigorose per il problema dell'equilibrio elastico dei solidi prismatici o cilindrici era stata inversamente tentata, in termini generali, da diversi Autori: Navier, Poisson, Clapeyron, Lamé. "Quest'ultimo anzi si era di proposito dedicato allo studio dell'equilibrio di un prisma rettangolare le cui sei facce erano cimentate da forze date in modo arbitrario. Ma Lamé non si contentava che delle soluzioni rigorose e le sue ricerche furono lunghe quanto infruttuose. Pure egli continuò ad annettere a questo problema una grandissima importanza e volle ripetutamente richiamare su di esso l'attenzione degli studiosi di tutto il mondo inducendo l'Académie des Sciences a proporlo come argomento dei suoi premi maggiori (1846-58).

Barrié de S. Venant fu il primo a rendersi conto della poca utilità che il problema di Lamé, anche se rigorosamente risolto, avrebbe avuto in pratica. Egli osserva giustamente in una nota della sua introduzione del trattato di Clebsch che, se si eccettua il solo caso della pressione uniforme prodotta da un fluido, i dati stessi di quel problema, cioè le forze distribuite punto per punto sulle sei facce del prisma, non sono mai conosciuti: tali forze nascono infatti sempre dal contatto del corpo dato con altri corpi, contatto il quale dipende dallo stato delle loro superficie come dalla natura dei materiali di cui son costituiti.

Le condizioni ai limiti nel problema di Lamé non potranno quindi mai essere assegnate col dovuto rigore, poiché delle azioni

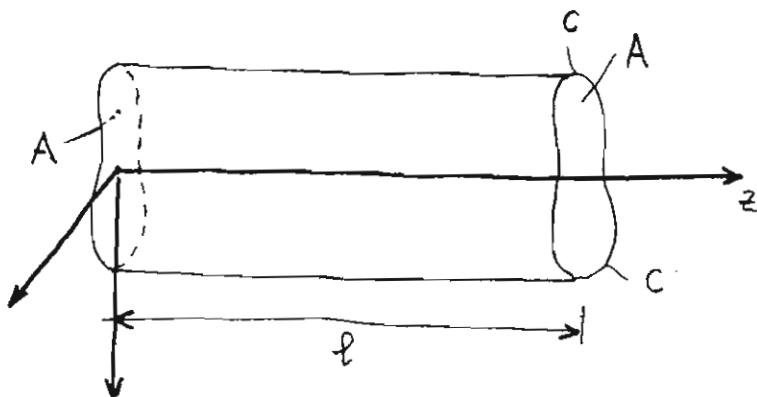
esterne applicate alle sei facce del prisma noi non conosceremo mai la legge di distribuzione vera, ma soltanto le forze e le coppie risultanti" (Cfr. Colonnetti, op. cit. p. 101).

Questa osservazione di Saint Venant si è dimostrata feconda per un'ampia classe di problemi applicativi poiché ha consentito lo sviluppo di un metodo semi-inverso, per l'analisi del cilindro o del prisma - in opportune condizioni - atto a conseguire soluzioni efficaci e sufficientemente rispondenti alle verifiche sperimentali.

"Consideriamo un solido cilindrico (o prismatico) cioè generato da un'area A , piana, di forma qualunque, che si muova nello spazio descrivendo con ogni suo punto una linea retta, a cui l'area generatrice si conservi sempre normale: la lunghezza l del cilindro sia in ogni caso assai grande a fronte delle sue dimensioni trasversali.

Supporremo il materiale omogeneo ed isotropo. Supporremo poi nulle le forze di massa, e libera così da ogni forza come da ogni vincolo la superficie laterale cilindrica. Il solido non potrà pertanto venir sollecitato né vincolato se non in corrispondenza delle basi.

Riferiamo un tale sistema ad una terna di assi cartesiani ortogonali aventi l'origine nel baricentro di una delle basi, assumendo per assi delle x e delle y gli assi principali di inerzia di questa. L'asse delle z coinciderà con l'asse geometrico del cilindro" ([ivi, p. 93], vedi fig.).



A questo punto si può formulare il problema dell'equilibrio elastico in forma diretta: essendo assegnate le forze agenti sulle basi (ed eventualmente

le modalità di vincolo) determinare le componenti di tensione, di deformazione, di spostamento in ogni punto del cilindro. Tale formulazione sarebbe quella più utile, ma presenta, come si è detto, difficoltà matematiche insormontabili.

Ad essa può esser sostituita la formulazione inversa che consiste nell'assegnare a priori le componenti di spostamento in tutti i punti del cilindro e nel dedurre le forze esterne al contorno (e in generale di volume) che sono compatibili con tale determinazione. Questa forma del problema è in effetti accessibile in modo immediato, ma non è significativa sul piano applicativo, poiché la completa determinazione a priori della soluzione le toglie ogni generalità.

Tra i due estremi (la formulazione diretta e quella inversa) è possibile una via di mezzo? Ossia, è possibile valersi di qualche ipotesi a priori nella soluzione, senza però determinarla completamente, e, in "ugual" misura, lasciare in qualche modo indeterminate la distribuzione delle forze superficiali, riservandosi però di ritenere assegnate a priori alcune sue proprietà, in modo da garantire alle soluzioni che si otterranno un certo grado di generalità?

In effetti è possibile configurare un procedimento semi-inverso, nel quale alcune, ma non tutte, tra le proprietà della soluzione sono assunte a priori, e, nello stesso tempo, alcune, ma non tutte, tra le proprietà delle sollecitazioni esterne sono lasciate a priori indeterminate. Tale procedimento semi-inverso, nella forma dovuta a Saint-Venant è congegnato nei seguenti termini:

A priori sono assegnate:

(per le sollicit. esterne)

le forze di volume, identicamente nulle;

le forze di superficie, sulla sup. laterale, identicamente nulle.

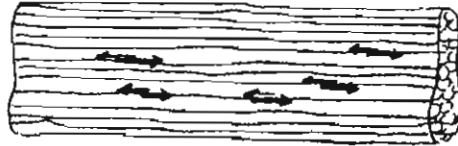
le caratt. di sollicitaz. sulle basi

(per la soluzione)

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} \quad (*)$$

in tutti i punti del cilindro.

(Nota: le ipotesi (.) possono essere illustrate intuitivamente: esse equivalgono all' ipotesi che tra le fibre longitudinali del cilindro si esercitino azioni mutue soltanto nella direzione delle fibre stesse. Vedi fig.)



Sono invece affidate alla effettiva risoluzione del problema:

(per le sollecit. esterne)
la distribuzione delle
forze sulle basi.

(per la soluzione)

le tre componenti della
tensione: σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{zz} ;

la completa determinazione
delle componenti di spostamento

La trattazione svolta da Saint-Venant ha dimostrato che questo procedimento è percorribile per intero [Cfr. R. Baldacci, *Scienza delle Costruzioni*, cit. vol. I).

Dal punto di vista applicativo i risultati che si ottengono riescono ad inquadrare in una teoria unitaria i diversi casi di sollecitazione che si incontrano nelle travi: la pressa o tenso-flessione, il taglio, la torsione.

Resta tuttavia da discuterne la validità: infatti non è vero in generale che le travi siano libere da forze sulla superficie laterale, e inoltre non è in generale assicurato che la effettiva distribuzione delle forze sulle basi sia quella "dedotta" al termine della risoluzione del problema di Saint-Venant.

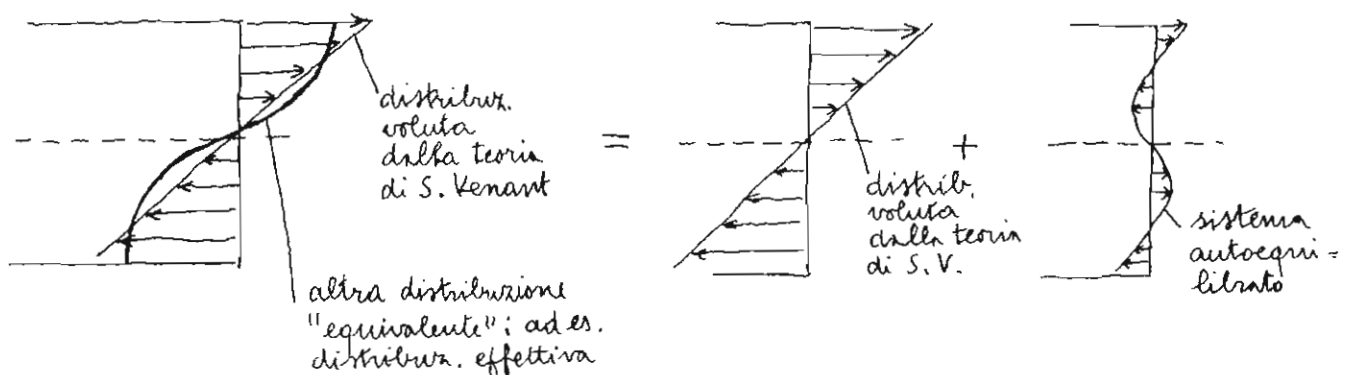
Consideriamo appunto questa seconda difficoltà alla quale in certa misura e in taluni casi può esser ricondotta la prima e che meglio si presta ad un'analisi critica.

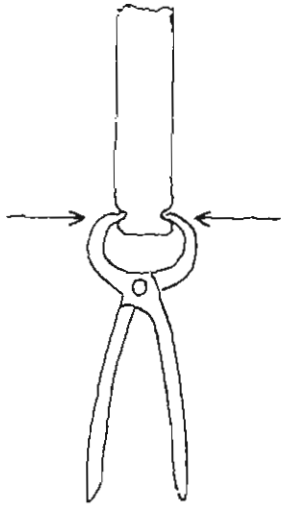
La possibilità di applicare i risultati di Saint-Venant ai casi in cui non è rispettata la distribuzione delle forze sulle basi voluta dalla teoria, "deriva da ciò che la sostituzione di un dato sistema di forze applicato ad una delle basi con un altro staticamente equivalente, cioè avente la medesima forza e la medesima coppia risultanti, per quanto differente nel modo di applicazione e nella legge di distribuzione, è senza influenza sensibile sulle condizioni statiche dei punti del cilindro che sono situati ad una sufficiente distanza dalla base stessa" (Colometti, loc. cit. p. 96).

Questo asserito costituisce in verità un principio, poiché di esso non è nota la giustificazione dimostrativa generale. Si tratta appunto del principio di Saint-Venant.

Nel "Résumé des Leçons...", discutendo la flessione delle trave egli infatti osserva che la distribuzione lineare della tensione è rigorosamente verificata solo se le forze esterne applicate sulle basi sono distribuite nello stesso modo in cui esse sono distribuite sulle sezioni intermedie. Tuttavia, dice Saint-Venant, la soluzione ottenuta sarà sufficientemente approssimata per ogni altra distribuzione delle forze sulle basi, a patto che la risultante e il momento risultante delle forze applicate rimangano invariati.

Risultati sperimentali da lui precedentemente ottenuti dimostrano che se un sistema di forze autoequilibrato sono distribuite su una piccola porzione del prisma (o del cilindro) il suo effetto è soltanto locale. Ciò è sufficiente ad accreditare la tesi, come si può osservare dalla figura.





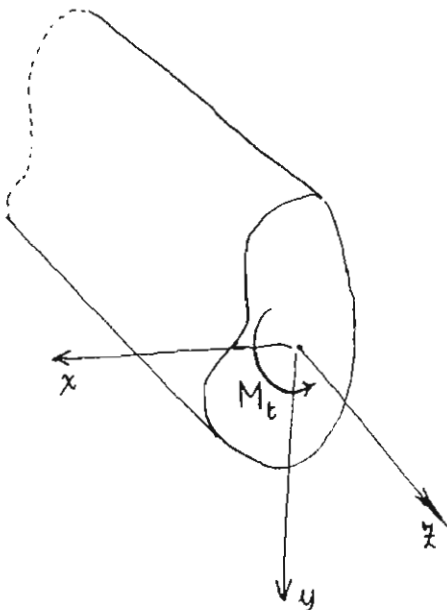
Un esempio significativo dato da Saint-Venant a questo proposito è quello della figura accanto. Le due forze uguali e opposte che agiscono alla estremità del provino producono deformazioni locali nelle vicinanze dell'estremità stessa ma lasciano il resto praticamente a riposo.

6.4. La torsione (caso particolare del problema di Saint-Venant)

Come esempio del metodo semi-inverso descritto brevemente nel § precedente, considereremo la trattazione di Saint-Venant per la torsione dei prismi. Sia dato dunque un prisma libero nello spazio, per il quale valgono le ipotesi precedentemente esposte, soggetto a solo momento torcente M_t .

Nello spirito del procedimento semi-inverso, poniamo "parzialmente" a priori le componenti di spostamento secondo le formole:

$$u_x = -\kappa_t z y \quad u_y = -\kappa_t z x \quad u_z = \kappa_t \varphi(x, y) \quad (0)$$



dove κ_t è una costante da determinare e $\varphi(x, y)$ è una funzione a un sol valore, continua, attualmente incognita.

Dalle equazioni di congruenza si deduce:

$$\epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \kappa_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \kappa_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right)$$

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xy} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0$$

Il legame elastico lineare isotropo ci assicura che

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (\emptyset)$$

mentre è:

$$\sigma_{zx} = G \kappa_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \quad \sigma_{zy} = G \kappa_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (\circ)$$

Pertanto siamo nell'ambito delle ipotesi fondamentali di Saint-Venant cui si aggiunge l'ulteriore condizione $\sigma_{zz} = 0$.

Ne risulta che le forze applicate sulle basi dovranno comprendere la condizione $F_z = 0$. Infatti le condizioni di equilibrio al contorno:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} n_x + \sigma_{yx} n_y + \sigma_{zx} n_z &= F_x \\ \sigma_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{zy} n_z &= F_y \\ \sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z &= F_z \end{aligned} \quad (\circ\circ)$$

esplicitate per le basi dove è $n_x = 0, n_y = 0, n_z = \pm 1$ diventano:

$$\sigma_{zx} = \pm F_x \quad \sigma_{zy} = \pm F_y \quad \sigma_{zz} = \pm F_z = 0$$

Sulla superficie laterale, invece le $(\circ\circ)$ si traducono nella condizione:

$$\sigma_{xz} n_x + \sigma_{yz} n_y = 0 \quad (\text{in } C) \quad (\times)$$

Ora, dopo aver utilizzato la congruenza e il legame, imponiamo l'equilibrio nei punti interni del cilindro, ricordando le equazioni indefinite di Cauchy

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0$$

Esse si riducono, per le (\emptyset) , alle:

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (\text{identicamente soddisfatte})$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (*)$$

Ne segue :

$$\nabla \varphi = 0 \quad \text{in } A \quad \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \quad (\nabla)$$

Ecco, dunque l'equazione cui deve soddisfare la $\varphi(x, y)$.

Al contorno poi deve valere la (*) e ciò si traduce nella condizione :

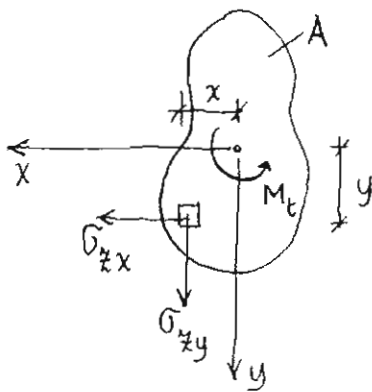
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = -y n_x + x n_y \quad (\nabla)$$

Dal punto di vista matematico, la funzione $\varphi(x, y)$ è ormai completamente definita (a meno di una costante inessenziale).

Per ogni forma della sezione trasversale la φ assumerà determinazioni diverse : si tratta di risolvere caso per caso un problema matematico "ben posto" e del resto assai noto (problema di Dirichlet - Neumann)

Resta ancora da tener conto delle condizioni di equilibrio globale sulle basi dove agisce il momento torcente M_t .

Si avrà dunque (vedi fig.) :



$$\begin{aligned} M_t &= \int_A (\sigma_{zy} x - \sigma_{zx} y) dA \\ &= G n_t \left\{ \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \right) dA + J_0 \right\} \\ &= G n_t \left\{ -\mathcal{D}[\varphi] + J_0 \right\} \quad (\star) \end{aligned}$$

dove si è posto :

$$J_0 = \int_A (x^2 + y^2) dA \quad (\text{mom. di in. polare})$$

$$\mathcal{D}[\varphi] = \int_A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} y - \frac{\partial \varphi}{\partial y} x \right) dA$$

L'integrale $\mathcal{D}[\varphi]$ dipende esclusivamente da φ e quindi dalla forma della sezione trasversale : esso prende il nome di integrale di Dirichlet.

Per le applicazioni si utilizzerà il fattore di torsione q definito dalla :

$$q = \frac{J_0}{J_0 - \mathcal{D}[\varphi]}$$

La (*) assume quindi la forma :

$$M_t = \frac{G \kappa_t J_0}{q}$$

da cui :

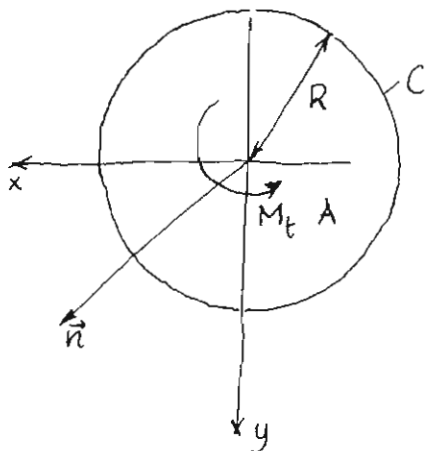
$$\kappa_t = \frac{q M_t}{G J_0}$$

Questa formula è analoga a quelle che legano la curvatura flessionale al momento flettente. In effetti κ_t ha appunto il significato di una curvatura. È immediato individuare la interpretazione geometrica: κ_t designa l'angolo di rotazione mutua (intorno all'asse z) tra due sezioni trasversali distanti tra loro dell'unità di lunghezza. Ad essa si dà il nome di torsione.

Esempi

1. Sezione circolare.

In questo caso è $n_x = \frac{x}{R}$, $n_y = \frac{y}{R}$. La (∇) diventa :



$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = 0 \quad \text{su } C$$

In A deve essere :

$$\nabla \varphi = 0$$

Pertanto il problema in φ è omogeneo ed ha come soluzione $\varphi \equiv \text{cost}$, ovvero, senza ledere la generalità, nel nostro

caso : $\varphi \equiv 0$

La soluzione si pone dunque nei seguenti termini :

$$\kappa_t = \frac{M_t}{GJ_0}$$

$$\sigma_{zx} = -G\kappa_t y$$

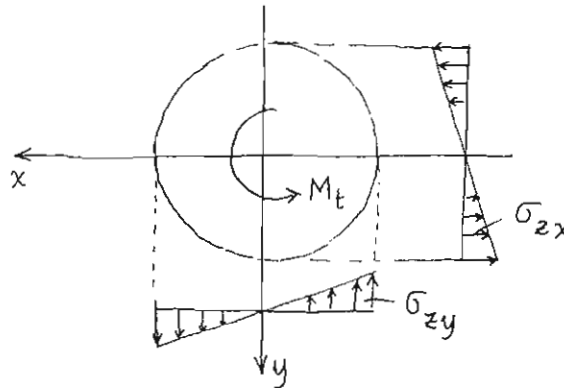
$$u_x = -\kappa_t z y$$

$$\sigma_{zy} = G\kappa_t x$$

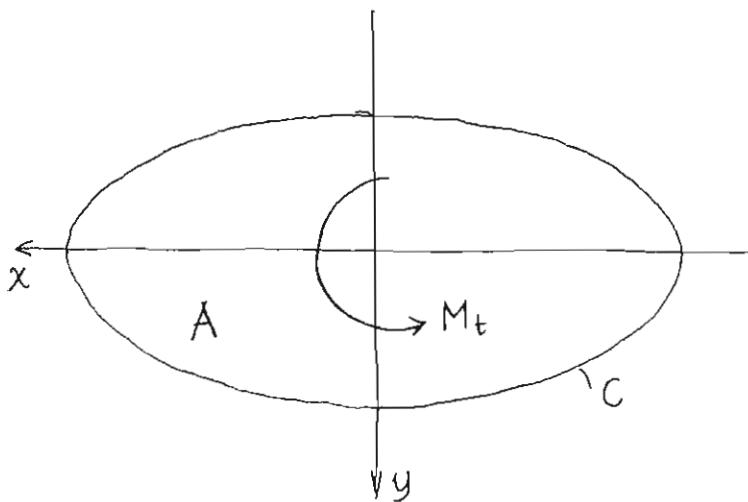
$$u_y = \kappa_t z x$$

$$u_z = 0$$

Notiamo che se la sezione è circolare essa rimane piana ($u_z = 0$). L'andamento delle tensioni è lineare



2. Sezione ellittica



Supponiamo che il cilindro abbia per sezione retta una ellisse di semiassi p_1, p_2 .

L'equazione del contorno della sezione è dunque:

$$\frac{x^2}{p_1^2} + \frac{y^2}{p_2^2} = 1$$

Si può dimostrare che la funzione φ che risolve il nostro problema è :

$$\varphi = \frac{p_2^2 - p_1^2}{p_1^2 + p_2^2} x y$$

Per il calcolo del fattore di torsione osserviamo anzitutto che è :

$$\mathcal{D}[\varphi] = \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} (J_x - J_y)$$

e inoltre :

$$J_x - J_y = \frac{\pi}{4} \rho_1 \rho_2 (\rho_2^2 - \rho_1^2)$$

mentre :

$$J_0 = \frac{\pi}{4} \rho_1 \rho_2 (\rho_1^2 + \rho_2^2)$$

Quindi :

$$q = \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2\rho_1\rho_2} \right)^2$$

Si nota che q risulta sempre ≥ 1 (questa proprietà vale in generale) ed $\bar{c} = 1$ nel caso di sezione circolare.

Più specificamente :

per $\rho_1/\rho_2 =$	$q =$
1	1
2	1.25
3	1.67
4	2.13
5	2.60
6	3.08
7	3.57
8	4.07
9	4.56
10	5.06

Finalmente la torsione κ_t è espressa da :

$$\kappa_t = \left(\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{2\rho_1\rho_2} \right)^2 \frac{M_t}{GJ_0}$$

Sostituendo a J_0 il suo valore già indicato e tenendo conto che $A = \pi\rho_1\rho_2$, si può anche scrivere :

$$\kappa_t = 4\pi^2 \frac{M_t J_0}{GA}$$

Sotto questa forma appare che, se si fa variare il rapporto dei due semiasse dell'ellisse mantenendone costante l'area, la torsione prodotta da un dato momento torcente varia proporzionalmente al momento di inerzia polare.

Questa espressione per π_t può essere, in via di approssimazione, applicata a cilindri di sezione diversa dall'ellittica, assumendo cioè per il fattore di torsione la determinazione:

$$q \approx 40 \frac{J_0^2}{A^4}$$

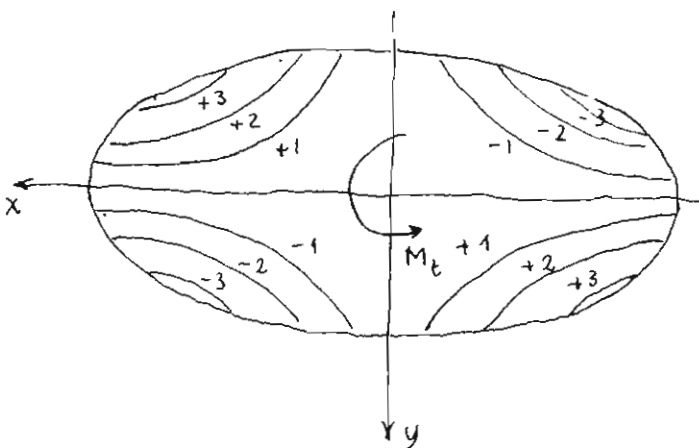
I risultati che si ottengono sono praticamente assai soddisfacenti per sezioni "raccolte".

Vediamo ora l'ingobbimento della sezione retta. La terza delle (o) prende la forma:

$$u_z = \frac{p_1^4 - p_2^4}{4 p_1^2 p_2^2} \frac{M_t}{G J_0} x y$$

Si tratta dell'equazione di un paraboloido iperbolico.

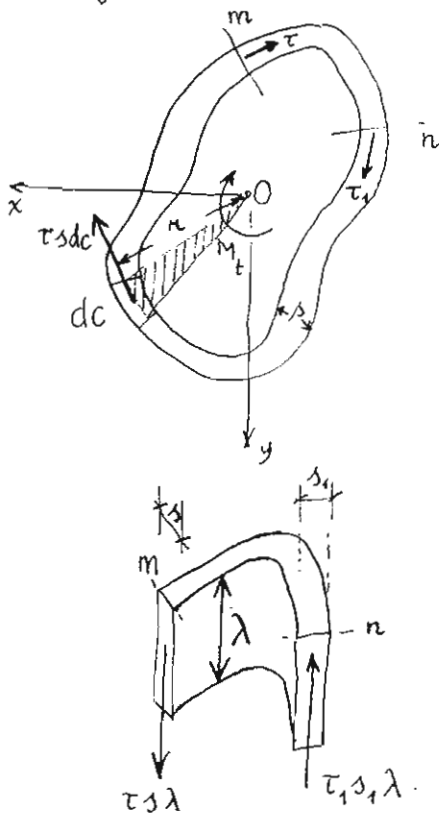
Per $x=0$ ovvero per $y=0$ si ha $u_z=0$: ossia gli assi della sezione si mantengono nel piano primitivo.



Se $p_1 > p_2$, u_z è positivo quando x e y sono di segno concorde, ed è negativo dove x e y hanno segno discorde. Nella figura la deformazione è rappresentata mediante linee di livello.

6.5. Torsione per sezioni tubolari con pareti sottili.

È conveniente presentare un metodo di analisi approssimata per cilindri a sezioni cave con parete sottile. La teoria di Saint-Venant in questi casi può rivelarsi laboriosa e insoddisfacente. Si deve a R. Bredt (Studien zur Drehungselastizität, Zs. V.D.I. p. 815, 1896) una formula di elementare uso ed intuitivamente significativa.



Dalla condizione di equilibrio al contorno

$$\sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0$$

risulta che nei punti del contorno esterno e di quello interno della sezione la tensione tangenziale risultante τ ($|\tau| = \sqrt{\sigma_{zx}^2 + \sigma_{zy}^2}$) è diretta secondo la tangente al contorno; quindi nei punti intermedi le linee di tensione hanno andamento poco diverso dai contorni.

Inoltre si può ritenere che τ sia costante nei vari punti dello spessore, con approssimazione tanto migliore quanto più s è piccolo rispetto alle dimensioni della sezione. È questa l'unica ipotesi semplificativa del procedimento.

Infine, si dimostra facilmente che il prodotto τs è costante dovunque; per cui τ lungo la sezione varia in ragione inversa dello spessore s , e in particolare è costante se è costante s .

Infatti, siano s ed s_1 gli spessori, τ e τ_1 le tensioni in due punti qualunque m ed n . Se si tracciano per m ed n due sezioni longitudinali (vedi fig.), normali ai contorni, in esse, per il "principio di dualità" ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), agiscono tensioni uguali alle τ e τ_1 ; quindi sulle porzioni limitate fra due sezioni rette distanti λ

agiscono le forze $\tau s \lambda$ e $\tau_1 s_1 \lambda$. Per l'equilibrio in direzione longitudinale del solido compreso fra le due sezioni rette e le due sezioni longitudinali, dev'essere

$$\tau s \lambda = \tau_1 s_1 \lambda \quad \text{e quindi} \quad \tau s = \tau_1 s_1 = \text{costante.}$$

Su un elemento dc del contorno agisce la forza $\tau s dc$, e il momento di questa rispetto a un punto qualsiasi O del piano della sezione è $\tau s dc \cdot r$. La somma di questi momenti per tutti gli elementi del contorno c deve fare equilibrio al momento torcente:

$$\int_C \tau s r dc = M_t$$

e per la costanza di τs :

$$\tau s \int_C r dc = M_t$$

L'integrale è il doppio dell'area Ω racchiusa dalla linea media fra i due contorni, per cui risulta

$$\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}$$

Se lo spessore s non è piccolissimo, questa formula dà il valore medio di τ nello spessore, mentre il valore massimo all'esterno è un poco maggiore. [Cf. Belluzzi O. : Sc. d. Costr. 1, p. 217]

6.6. D. J. Jourawski (1821-1891)

Nel 1842 Jourawski si diploma presso l'Istituto di Ingegneria delle Vie di Comunicazione di S. Pietroburgo: un istituto già organizzato da ingegneri francesi ma ormai affidato a studiosi russi; tra costoro emergeva il matematico M.V. Ostrogradski.

La carriera di Jourawski si collega alla costruzione delle ferrovie in Russia. Appunto nel 1842 fu assegnato al progetto della ferrovia tra S. Pietroburgo e Mosca. Nel 1844 fu incaricato del progetto e della costruzione della più importante struttura della linea, il ponte sul fiume Ureclia (9 campate, lunghezza 180 piedi, 170 piedi sopra la superficie dell'acqua).

Durante la costruzione di quest'opera, Jourawski ebbe spesso da usare travi lignee di grande spessore: il materiale era scarsamente resistente a taglio lungo le fibre, e Jourawski si rese conto dell'importanza della sollecitazione a taglio e della esigenza di non trascurarne gli effetti nella progettazione.

Scarso vantaggio egli ottenne dalla letteratura esistente a quel tempo sull'argomento, poiché nonostante che esso fosse dibattuto (ricordiamo le considerazioni svolte sulle tensioni tangenziali da Coulomb e le critiche di Vicat alla teoria classica della flessione incapace di render ragione del taglio), la teoria non era ancora sviluppata a livello tecnico soddisfacente.

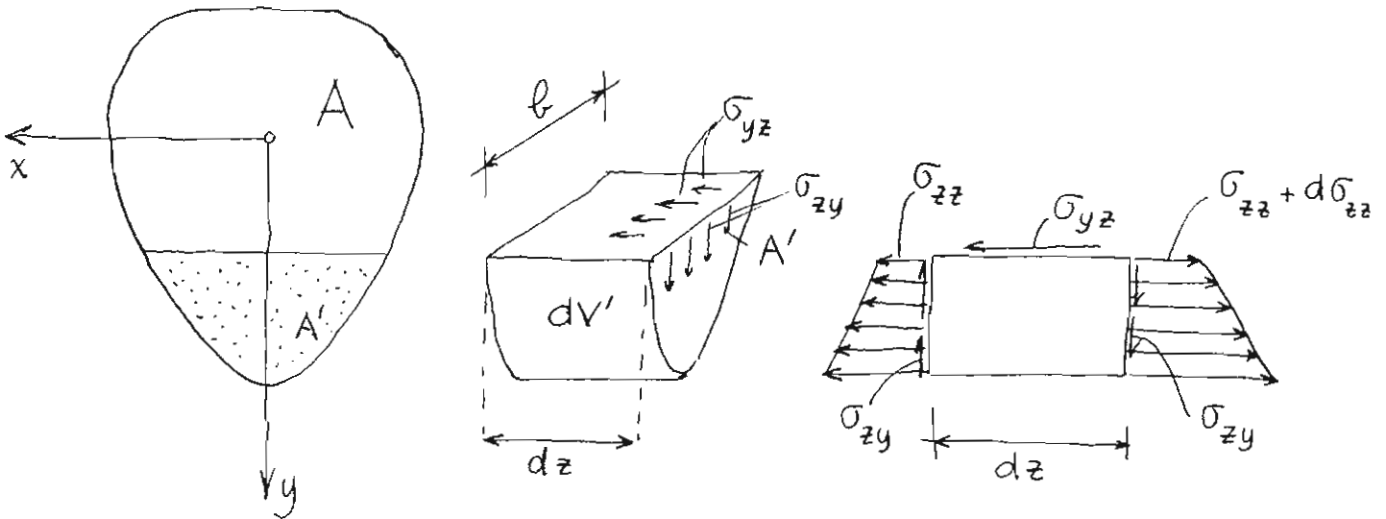
Navier nella 2^a edizione del suo libro ne aveva offerto una trattazione evitata.

Jourawski affrontò dunque il problema in modo diretto e indipendente, giungendo a una formula, sia pur approssimata, tuttora largamente usata.

La soluzione rigorosa del problema del taglio fu data da S. Venant nel 1856, a prezzo però di gravi e spesso insormontabili difficoltà analitiche che non tolsero valore alla teoria approssimata di

Jourawski, come lo stesso S. Venant ebbe a riconoscere.

Si consideri dunque una trave soggetta a momenti flettenti e a taglio; per semplicità si supponga la sezione simmetrica rispetto all'asse y .



Isolato un elemento dV di lunghezza infinitesima dz , si esprima ora l'equilibrio alla traslazione orizzontale della sua porzione dV' (vedi fig.).

Se si suppone - e qui sta l'approssimazione - che la tensione tangenziale σ_{yz} sia distribuita uniformemente sulla faccia di lati dz e b , si ha:

$$-\int_{A'} \sigma_{zz} dA + \int_{A'} (\sigma_{zz} + d\sigma_{zz}) dA - \sigma_{yz} \cdot b \cdot dz = 0$$

Ricordando che $\sigma_{zz} = \frac{M_x y}{J_x}$ e quindi $d\sigma_{zz} = \frac{dM_x}{J_x} y$ ne segue:

$$\frac{dM_x}{J_x} \int_{A'} y dA - \sigma_{yz} b dz = 0$$

Indichiamo con S'_x il momento statico di A' rispetto all'asse x ; cioè:

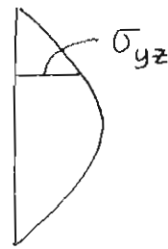
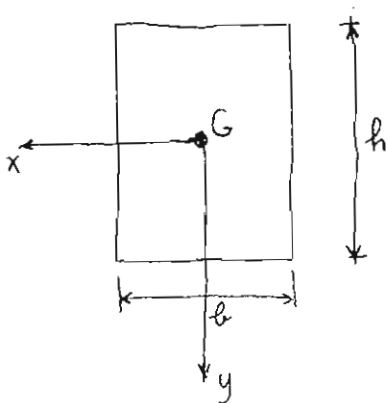
$$S'_x = \int_{A'} y dA$$

Poiché $\frac{dM_x}{dz} = T_y$, la (1) si traduce nella:

$$\sigma_{yz} = \frac{T_y S'_x}{J_x b}$$

che è la formula richiesta.

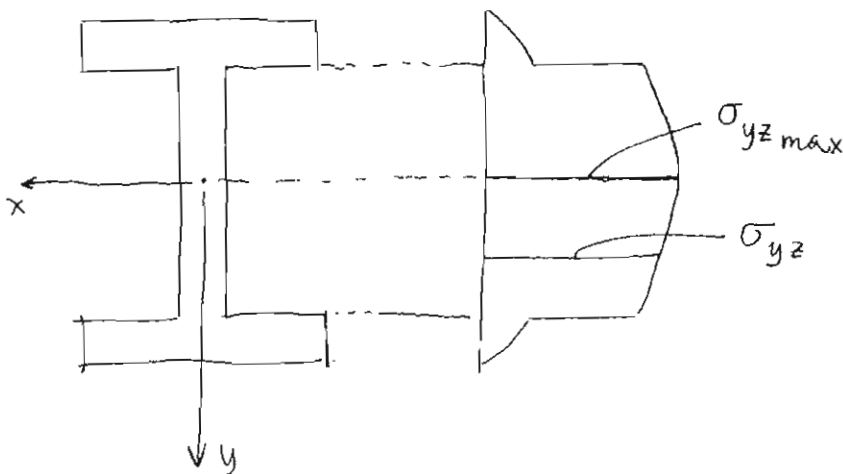
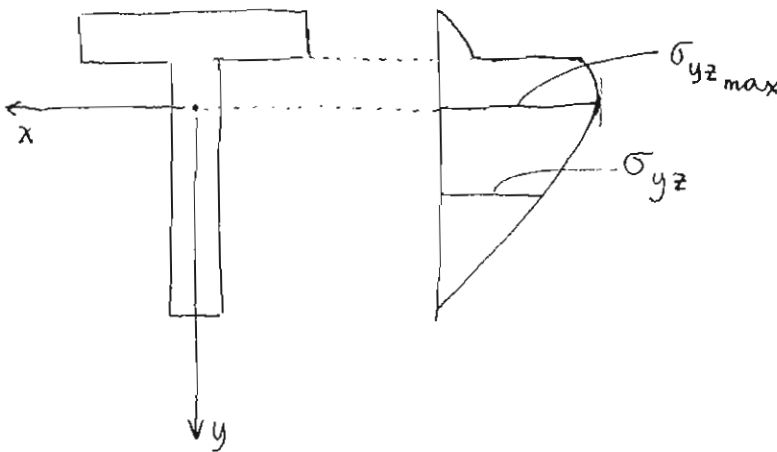
Applicazioni.



$$S'_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{\frac{h}{2} + y}{2} = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

$$J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\sigma_{yz} = \frac{6 T_y}{b h^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$



7. TRAVI E TRAVATURE

INTRODUZIONE : EQUILIBRIO, CONGRUENZA, TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI, LEGAME ELASTICO LINEARE.

LA MECCANICA DELLE STRUTTURE NELLA EVOLUZIONE DELLA INGEGNERIA FERROVIARIA. LA TRAVE CONTINUA : EQUAZIONE DI BERTOT - CLAPEYRON. IL TEOREMA DI CLAPEYRON. IL CONTRIBUTO DI MENABREA E DI CASTIGLIANO ALLA MECCANICA DELLE STRUTTURE : DETERMINAZIONE DEGLI SPOSTAMENTI NELLE TRAVATURE ELASTICHE ; SOLUZIONE DEI PROBLEMI IPERSTATICI.

LE TRAVATURE RETICOLARI : LORO PRIME REALIZZAZIONI NELL' 800. L'ANALISI DELLE SOLLECITAZIONI : CONTRIBUTI DI RITTER, CULMANN, MAXWELL, CREMONA, MÖBIUS, MOHR, JOUKOWSKI, MÜLLER-BRESLAU. DETERMINAZIONE DELLO STATO DI SPOSTAMENTO : IL METODO FONDAMENTALE DI MAXWELL - MOHR. SOLUZIONE DEI PROBLEMI IPERSTATICI COL METODO DI MAXWELL-MOHR.

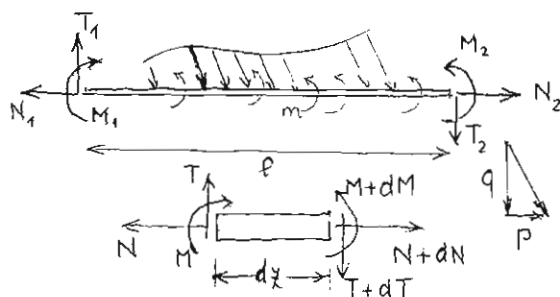
ESTENSIONE DEL METODO DI MAXWELL - MOHR : TRAVATURE CON VINCOLI E CONNESSIONI IMPERFETTE ; TRAVATURE TERMO-ELASTICHE.

7.1. INTRODUZIONE

Per maggior chiarezza, premettiamo alla esposizione storica alcune indicazioni generali : esse consueviranno di dar veste organica e unitaria ai diversi procedimenti risolutivi che sono stati spesso originalmente pensati e proposti su casi particolari. Ovviamente, dobbiamo, a questo scopo, venir meno al rispetto di una rigorosa cronologia : l'importazione che si seguirà fu messa a punto, in tutta generalità, solo in tempi recenti, a partire da alcuni contributi di O. Zanaboni (3 solidi semielastici. Proposta

di una teoria generale indipendente dal legame sforzi-deformazioni. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 15, 1-28 (1941); Introduzione ad una Scienza delle Costruzioni assoluta. Ricerche di Ingegneria, 11, 2 (1943). Per una trattazione completa e coerente si rimanda al trattato di R.F. Baldacci (Scienza delle Costruzioni, UTET, Torino, 2 (1976)). Qui si limiterà il discorso alle travi (e a sistemi di travi, o travature) elastiche piane ad asse rettilineo.

Già conosciamo (dal corso di "Statica") le equazioni indefinite di equilibrio. Richiamiamone brevemente la deduzione. Il carico sia rappresentato



da una distribuzione di forze assiali e trasversali di intensità $p(z)$, $q(z)$ rispettivamente e da una distribuzione di momenti di intensità $m(z)$. In A e in B agiranno, nel caso più generale, tre reazioni vincolari per ogni estremo. Espri-

miamo l'equilibrio di un tronco elementare dz applicando ai suoi estremi le azioni ad esso trasmesse dalla trave. Siano N, M, T le caratteristiche di sollecitazione agenti sull'estremo di sinistra e $N+dN, M+dM, T+dT$ quelle agenti sull'estremo di destra; le equazioni di equilibrio sono:

$$\begin{aligned} (N + dN) - N + p dz &= 0 \\ (T + dT) - T + q dz &= 0 \\ (M + dM) - M - T dz + m dz &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

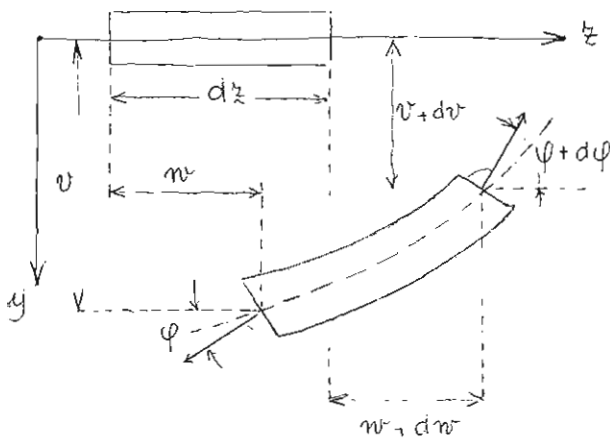
da cui si traggono le equazioni differenziali:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dz} + p &= 0 \\ \frac{dT}{dz} + q &= 0 \\ \frac{dM}{dz} + m &= T \end{aligned} \quad (1.2)$$

Descriviamo ora lo stato di deformazione. Poiché utilizziamo la definizione di trave come struttura monodimensionale caratterizzata dalle proprietà della linea d'asse, l'analisi della sua deformazione è ricondotta allo studio del comportamento della sua linea d'asse: quindi, come la sollecitazione è individuata dalle caratteristiche di sollecitazione che sono appunto riferite ai punti dell'asse,

anche la deformazione è individuata da tre parametri riferiti ai punti dell'asse che prendono il nome di caratteristiche della deformazione.

Tuttavia, per rendere più intuitivo il discorso, rappresentiamo in figura non soltanto la linea d'asse ma anche il corpo tridimensionale della trave ad essa associato. Consideriamo un elemento di trave nella configurazione iniziale e nella generica configurazione deformata. Con riferimento al sistema di

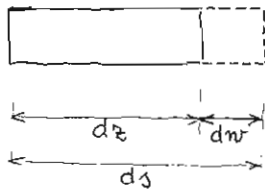


coordinate $O(y, z)$, si definiscono le caratteristiche di spostamento di ogni sezione introducendo le quantità

- w : spostamento assiale (secondo l'asse z) positivo se concorde con z ;
- v : spostamento trasversale (secondo l'asse y) positivo se concorde con y ;
- φ : rotazione della sezione trasversale in corrispondenza della linea d'asse, positiva se antioraria.

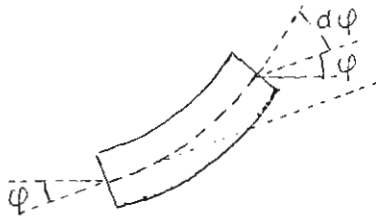
A questo punto possiamo esaminare separatamente l'effetto deformativo delle tre caratteristiche di spostamento. Una variazione dw dello spostamento

assiale corrisponde a una variazione di lunghezza dell'elemento deformato ds e quindi a una dilatazione lineare :



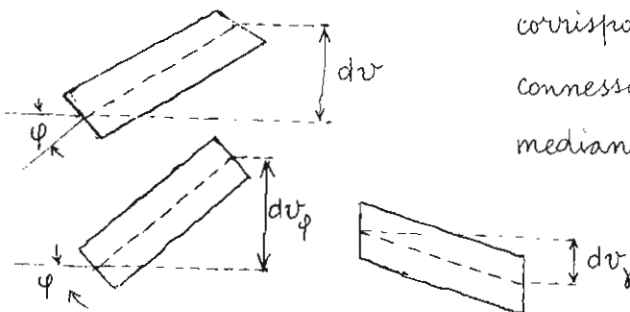
$$\epsilon = \frac{ds - dz}{dz} = \frac{dw}{dz} \quad (1.3)$$

Una variazione $d\varphi$ della rotazione corrisponde, come sappiamo (cfr. Bernoulli) alla curvatura :



$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dz} \quad (1.4)$$

Una variazione dv dello spostamento trasversale corrisponde a due effetti: una sua porzione dv_φ è connessa alla rotazione φ della sezione trasversale mediante la relazione :



$$\varphi = - \frac{dv_\varphi}{dz} \quad (1.5)$$

(il segno meno è dovuto al fatto che, con le convenzioni adottate, $\varphi > 0$ produce $d\psi_\varphi < 0$); l'altra sua porzione $d\psi_\gamma$ si riferisce esclusivamente allo scorrimento angolare tra la sezione trasversale e la linea d'asse deformata, inizialmente ortogonali tra loro. Ad essa resta dunque associata la dilatazione angolare

$$\gamma = \frac{d\psi_\gamma}{dz} \quad (1.6)$$

Essendo poi:

$$dv = d\psi_\varphi + d\psi_\gamma \quad (1.7)$$

si trae dalle (1.5) e (1.6) la relazione:

$$\gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi \quad (1.8)$$

Le grandezze ε , κ , γ (funzioni di z) sono denominate caratteristiche della deformazione. Esse sono legate alle caratteristiche di spostamento dalle relazioni:

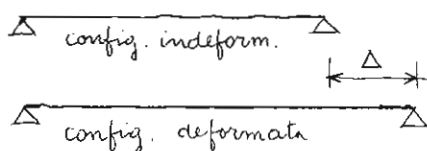
$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{dw}{dz} \\ \kappa &= \frac{d\varphi}{dz} \\ \gamma &= \frac{dv}{dz} + \varphi \end{aligned} \quad (1.9)$$

che rappresentano le equazioni indefinite di congruenza per la trave piana ad asse rettilineo. Per capirne il significato, ricordiamo che le equazioni di congruenza esprimono le condizioni di esistenza di una deformazione congruente con certi spostamenti intesi come funzioni regolari di z . Ora, fissata l'attenzione ad esempio nella prima equazione

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz},$$

si vede facilmente che mentre è possibile assegnare ad arbitrio un certo stato di spostamento $w(z)$ (continuo e tale da rispettare date condizioni agli estremi della trave) per trarne il corrispondente stato di deformazione $\varepsilon(z)$, non è invece possibile operare l'inverso. Cioè non è possibile, a partire da una certa determinazione della $\varepsilon(z)$, trarne una determinazione dello spostamento rispettosa dei vincoli e delle solite condizioni di regolarità.

Esempio: (v. fig.) posto a priori (cioè per una scelta arbitraria):

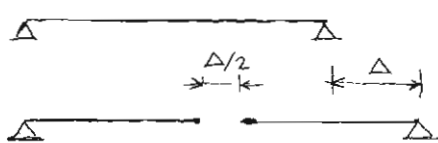


$$\varepsilon(z) = \text{cost} = \frac{\Delta}{2l}$$

dalla () si ottiene:

$$w(z) = \frac{\Delta}{2l} z + C ;$$

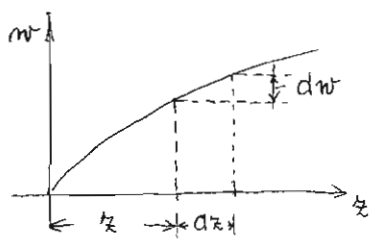
la costante C è nulla per il rispetto della condizione al contorno in A ; ne segue allora $w(l) = \frac{\Delta}{2}$, in contraddizione con la seconda condizione al contorno in B che impone $w(l) = \Delta$. Per superare la contraddizione w è un solo modo: supporre che $w(z)$ non sia continua. Ad esempio, si può pensare di



soddisfare le condizioni al contorno in A e in B proponendo lo stato di spostamento della figura. Si rende così plausibile, per il caso considerato, la seguente interpretazione delle (1.9): esse impongono condizioni alle caratteristiche di deformazione ϵ, κ, γ tali da garantire che lo stato di spostamento conseguente escluda strappi (o compenetrazioni) di materia e rispetti le condizioni al contorno.

Il teorema dei lavori virtuali

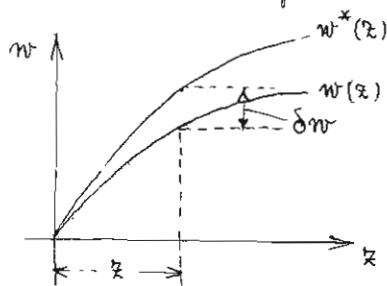
Cominciamo col definire i concetti di spostamento virtuale e di forza virtuale. Si consideri una funzione $w = w(z)$ espressiva, ad esempio, di una caratteristica di spostamento. Nella figura ne è rappresentato l'andamento. Nelle usuali ipotesi che si sono già richiamate circa la regolarità di $w(z)$, si può definire per ogni punto z il differenziale dw ; la figura ne dà l'interpretazione geometrica. Ora invece consideriamo un'



altra determinazione $w^*(z)$ dello spostamento "prossimo" a $w(z)$. A tal fine poniamo:

$$w^*(z) = w(z) + \theta \psi(z) \quad (1.10)$$

dove $\psi(z)$ designa uno spostamento arbitrario (rispettoso dei vincoli) e θ è un numero reale "piccolo" nel senso che è lecito trascurarne le potenze superiori alla prima. La differenza:



$$w^* - w = \theta \psi(z) \quad (1.11)$$

rappresenta uno spostamento regolare infinitesimo arbitrario (poiché tale è $\psi(z)$); ad esso si dà il nome

di sportamento virtuale. La definizione (1.11) equivale alla ordinaria definizione di variazione utilizzata da noi già implicitamente a pag. 59-61; è quindi coerente adottare per la quantità $w^* - w$ il simbolo lagrangiano δw in uso nel "Calcolo delle Variazioni". Si ha dunque:

$$\delta w = w^* - w = \theta \psi \quad (1.12)$$

Un lemma fondamentale del Calcolo delle Variazioni assicura la possibilità di invertire la successione dell'operatore variazionale δ con quello differenziale d rispetto alla variabile indipendente. Infatti risulta:

$$\delta d w = d w^* - d w = \theta d \psi = d(\theta \psi) = d(w^* - w) = d \delta w \quad (1.13)$$

La figura precedente illustra intuitivamente il significato di δw . È bene sottolineare che il differenziale $d w$ si riferisce ad una ben definita determinazione di $w(z)$ ed indica la differenza tra $w(z+dz)$ e $w(z)$:

$$d w = w(z+dz) - w(z) = \frac{d w}{d z} dz \quad (1.14)$$

Invece la variazione δw confronta in z la determinazione $w(z)$ con una generica (arbitraria) determinazione prossima $w^*(z)$, e indica, come si è detto la differenza tra $w^*(z)$ e $w(z)$:

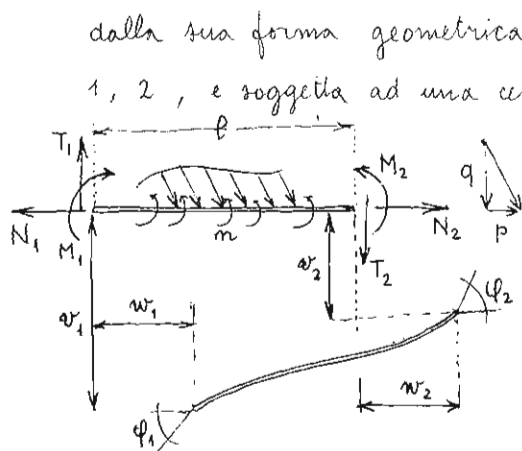
$$\delta w = w^*(z) - w(z) = \theta \psi(z) \quad (1.15)$$

La variazione δw è dunque qualcosa di assai più generale rispetto al differenziale $d w$; si riduce ad esso quando si assuma $\psi(z) = \frac{d w}{d z}$ e $\theta = dz$.

In modo formalmente identico si definisce la forza virtuale come forza infinitesima arbitraria.

Tutto ciò premesso, siamo in grado di formulare il principio dei lavori virtuali, non più come principio, ma come teorema, a partire dalle condizioni di equilibrio e di congruenza che abbiamo sopra studiate. Come sappiamo, ciò era già stato effettuato, in forma embrionale, da Varignon (1654-1722) [vedi p. 21]. Qui il discorso però diventa molto più completo poiché si tien conto della deformazione e delle sollecitazioni "interne".

Sia data dunque una struttura (una trave) caratterizzata, oltre che



dalla sua forma geometrica, da certe condizioni geometriche e statiche agli estremi 1, 2, e soggetta ad una certa distribuzione di carichi $p(z)$, $q(z)$, $m(z)$ (vedi la figura accanto). In generale si potrà pensare che si verifichino tre componenti di sollecitazione per ogni estremo (forza normale, forza trasversale, momento, di cui alcune eventualmente nulle) che denomineremo N_1, T_1, M_1 , e N_2, T_2, M_2 ; nei punti interni opereranno le caratteristiche $N(z), T(z), M(z)$. Dal punto di vista geometrico, gli estremi subiscono, in generale, un "vettore spostamento" caratterizzato dalla componente assiale, da quella trasversale e dalla rotazione, che indicheremo con w_1, v_1, φ_1 , e w_2, v_2, φ_2 ; i punti interni si spostano secondo le tre funzioni $w(z), v(z), \varphi(z)$, e in essi restano definite le caratteristiche di deformazione $\varepsilon(z), \kappa(z)$ e $\gamma(z)$.

L'equilibrio impone che siano soddisfatte le seguenti equazioni indefinite:

$$\frac{dN}{dz} + p = 0 \quad \frac{dT}{dz} + q = 0 \quad \frac{dM}{dz} + m = T \quad (\text{per } z \in (0, l)) \quad (1.16)$$

e le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} N(0) &= N_1 & T(0) &= T_1 & M(0) &= M_1 \\ N(l) &= N_2 & T(l) &= T_2 & M(l) &= M_2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

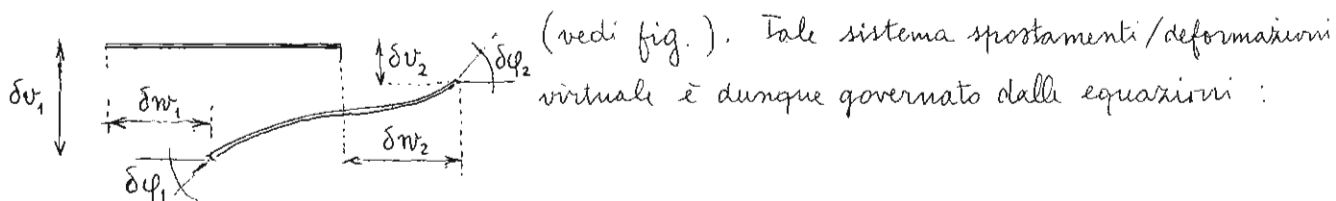
La congruenza impone invece che siano soddisfatte le seguenti equazioni indefinite:

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz} \quad \gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dz} \quad (\text{per } z \in [0, l]) \quad (1.18)$$

e le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} w(0) &= w_1 & v(0) &= v_1 & \varphi(0) &= \varphi_1 \\ w(l) &= w_2 & v(l) &= v_2 & \varphi(l) &= \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.19)$$

A questo punto, fissiamo l'attenzione sul sistema forze/sollecitazioni equilibrato, definito dalle (1.16) (1.17). Consideriamo la stessa struttura soggetta ad uno stato di spostamento/deformazione virtuale congruente



$$\delta \varepsilon = \frac{d \delta w}{dz} \quad \delta \gamma = \frac{d \delta v}{dz} + \delta \varphi \quad \delta \kappa = \frac{d \delta \varphi}{dz} \quad (1.20)$$

e dalle condizioni:

$$\begin{aligned} \delta w(0) &= \delta w_1 & \delta v(0) &= \delta v_1 & \delta \varphi(0) &= \delta \varphi_1 \\ \delta w(l) &= \delta w_2 & \delta v(l) &= \delta v_2 & \delta \varphi(l) &= \delta \varphi_2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \int_0^l (N \delta \varepsilon + T \delta \gamma + M \delta \kappa) dz &= \int_0^l (p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi) dz + \\ &+ N_2 \delta w_2 + T_2 \delta v_2 + M_2 \delta \varphi_2 - N_1 \delta w_1 - T_1 \delta v_1 - M_1 \delta \varphi_1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

In questa relazione si esprime il teorema dei lavori virtuali nella forma degli spostamenti virtuali. Essa ci dice, in breve, che, nell'ipotesi di equilibrio del sistema forze/caratteristiche di sollecitazione, e di congruenza del sistema spostamenti/deformazioni virtuali, il lavoro virtuale $\delta L_u^{int.}$ delle "forze interne" uguaglia il lavoro virtuale $\delta L_u^{est.}$ delle forze esterne. In effetti, si è già avuto modo di accennare alle legittimità di tale interpretazione per il primo membro della (1.22) [vedi pag. 59]; lasciamo allo studente la verifica minuziosa. Dunque:

$$\delta L_u^{int.} = \delta L_u^{est.} \quad (1.23)$$

(l'indice u sta a ricordare che il lavoro virtuale δL , esterno o interno, è valutato in corrispondenza di uno stato di spostamento virtuale).

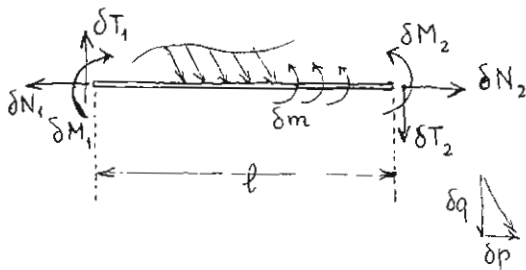
Per dimostrare la (1.22) basta tener conto delle condizioni di equilibrio (1.16) (1.17) che legano le caratteristiche di sollecitazione $N(z), T(z), M(z)$ alle forze $p(z), q(z), m(z), N_1, T_1, M_1, N_2, T_2, M_2$, e delle condizioni di congruenza che legano le caratteristiche di deformazione virtuale $\delta \varepsilon(z), \delta \gamma(z), \delta \kappa(z)$, allo stato di spostamento virtuale $\delta w(z), \delta v(z), \delta \varphi(z), \delta w_1, \delta v_1, \delta \varphi_1, \delta w_2, \delta v_2, \delta \varphi_2$. Il secondo membro della (1.22) può essere allora trasformato così:

$$\begin{aligned} &\int_0^l (p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi) dz + N_2 \delta w_2 + T_2 \delta v_2 + M_2 \delta \varphi_2 - N_1 \delta w_1 - T_1 \delta v_1 - M_1 \delta \varphi_1 = \\ &= \int_0^l (p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi) dz + N(l) \delta w(l) + T(l) \delta v(l) + M(l) \delta \varphi(l) - N(0) \delta w(0) - T(0) \delta v(0) + \\ &- M(0) \delta \varphi(0) = \int_0^l (p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi) dz + \left[N(z) \delta w(z) + T(z) \delta v(z) + M(z) \delta \varphi(z) \right] \Big|_0^l = \\ &= \int_0^l \left(p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi + \frac{d}{dz} [N \delta w + T \delta v + M \delta \varphi] \right) dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^l \left(\left[\frac{dN}{dz} + p \right] \delta w + \left[\frac{dT}{dz} + q \right] \delta v + \left[\frac{dM}{dz} + m \right] \delta \varphi + N \frac{d\delta w}{dz} + T \frac{d\delta v}{dz} + \right. \\
 &+ \left. M \frac{d\delta \varphi}{dz} \right) dz = \\
 &= \int_0^l \left(T \delta \varphi + N \frac{d\delta w}{dz} + T \frac{d\delta v}{dz} + M \frac{d\delta \varphi}{dz} \right) dz = \int_0^l (N \delta \epsilon + T \delta \gamma + M \delta \kappa) dz
 \end{aligned}$$

Resta così provato che il secondo membro della (1.22) è uguale al primo.

Ora fissiamo invece l'attenzione sul sistema spostamenti/caratteristiche di deformazione congruente definito sulla nostra struttura e caratterizzato dalle (1.18) (1.19). Consideriamo la stessa struttura soggetta ad un sistema forze/caratteristiche di sollecitazione virtuale equilibrato (vedi fig.). Tale sistema forze/sollecitazioni è dunque governato dalle equazioni:



$$\frac{d\delta N}{dz} + \delta p = 0 \quad \frac{d\delta T}{dz} + \delta q = 0 \quad \frac{d\delta M}{dz} + \delta m = \delta T \quad (1.24)$$

e dalle condizioni:

$$\begin{aligned}
 \delta N(0) &= \delta N_1 & \delta T(0) &= \delta T_1 & \delta M(0) &= \delta M_1 \\
 \delta N(l) &= \delta N_2 & \delta T(l) &= \delta T_2 & \delta M(l) &= \delta M_2
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Vale la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 \int_0^l (\epsilon \delta N + \gamma \delta T + \kappa \delta M) dz &= \int_0^l (w \delta p + v \delta q + \varphi \delta m) dz + w_2 \delta N_2 + v_2 \delta T_2 + \varphi_2 \delta M_2 + \\
 &- w_1 \delta N_1 - v_1 \delta T_1 - \varphi_1 \delta M_1
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

In questa relazione si esprime il teorema dei lavori virtuali nella forma delle forze virtuali. Essa ci dice, in breve, che nell'ipotesi di congruenza del sistema spostamenti/caratteristiche di deformazione e di equilibrio del sistema forze/caratteristiche di sollecitazione virtuale, il lavoro delle forze virtuali esterne $\delta L_f^{est.}$ uguaglia il lavoro delle forze virtuali interne $\delta L_f^{int.}$

Cioè:

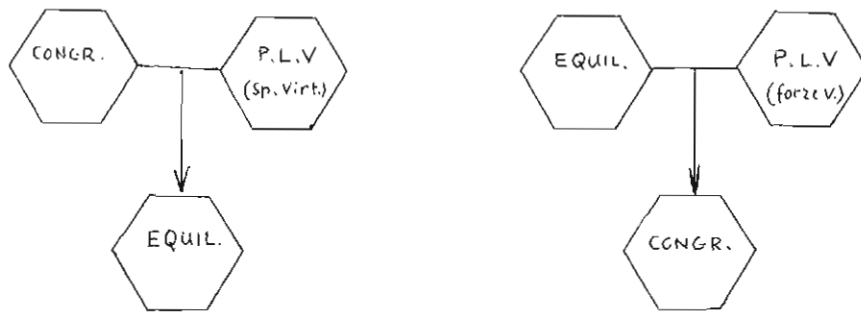
$$\delta L_f^{int.} = \delta L_f^{est.} \quad (1.27)$$

(l'indice f sta ad indicare che il lavoro virtuale, interno ed esterno, è valutato per una variazione virtuale delle forze). La dimostrazione della (1.26) procede in modo del tutto analogo a quello già utilizzato per la dimostrazione della (1.22);

quindi la omettiamo.

Osservazione importante

Si è veduto che dalle ipotesi di congruenza e di equilibrio deriva il teorema dei lavori virtuali nella duplice forma sopra descritta. È molto importante per le applicazioni osservare che valgono anche linee alternative di deduzione. Esse consentono di affermare che 1) l'ipotesi di congruenza e il principio dei lavori virtuali nella forma degli spostamenti virtuali implicano l'equilibrio, e, d'altra parte, 2) l'ipotesi di equilibrio e il principio dei lavori virtuali nella forma delle forze virtuali implicano la congruenza. La situazione è rappresentata schematicamente dai diagrammi:



Cerchiamo di chiarire il discorso.

1) Con riferimento ad una certa struttura, si consideri un arbitrario stato di spostamenti/deformazioni congruenti (virtuale): $\delta w, \delta v, \delta \varphi, \delta \epsilon, \delta \kappa, \delta \gamma$, dove:

$$\delta \epsilon = \frac{d \delta w}{dz}, \quad \delta \gamma = \frac{d \delta v}{dz} + \delta \varphi \quad \text{ecc.};$$

si consideri inoltre un sistema di forze p, q, m , e di caratteristiche di sollecitazione N, T, M del quale non si afferma a priori l'equilibrio, ma si afferma il rispetto dell'equazione (1.22); ossia p, q, m, N, T, M sono tali che, associate ad un generico stato di spostamenti/deformazioni congruenti virtuali verificano la:

$$\int_0^l (N \delta \epsilon + T \delta \gamma + M \delta \kappa) dz = \int_0^l (p \delta w + q \delta v + m \delta \varphi) dz + N_2 \delta w_2 + T_2 \delta v_2 + M_2 \delta \varphi_2 - (N_1 \delta w_1 + T_1 \delta v_1 + M_1 \delta \varphi_1).$$

Ebbene, allora tale sistema di forze / caratteristiche di sollecitazione è equilibrato; in altri termini per esso valgono le solite condizioni:

$$\frac{dN}{dz} + p = 0 \quad \frac{dT}{dz} + q = 0 \quad \text{ecc.}$$

2) Con riferimento a una certa struttura, si consideri un arbitrario sistema di forze/caratteristiche di sollecitazione equilibrato (virtuale) $\delta p, \delta q, \delta m, \delta N, \delta T, \delta M$, dove:

$$\frac{d\delta N}{dz} + \delta p = 0 \quad \frac{d\delta T}{dz} + \delta q = 0 \quad \text{ecc.};$$

si consideri inoltre uno stato di spostamento w, v, φ e di deformazione ϵ, γ, κ , del quale non si afferma a priori la congruenza, ma si afferma il rispetto dell'equazione (1.26); ossia, $w, v, \varphi, \epsilon, \gamma, \kappa$ sono tali che, associati ad un generico sistema di forze/sollecitazioni equilibrate virtuali, verificano la:

$$\int_0^l (\epsilon \delta N + \gamma \delta T + \kappa \delta M) dz = \int_0^l (w \delta p + v \delta q + \varphi \delta m) dz + w_2 \delta N_2 + v_2 \delta T_2 + \varphi_2 \delta M_2 + \\ - (w_1 \delta N_1 + v_1 \delta T_1 + \varphi_1 \delta M_1).$$

Ebbene, allora tale stato di spostamenti/deformazioni è congruente; in altri termini esso verifica le solite condizioni:

$$\epsilon = \frac{dw}{dz} \quad \gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi \quad \kappa = \frac{d\varphi}{dz} \quad \text{ecc.}$$

La dimostrazione di 1) e di 2) non presenta alcuna difficoltà e quindi può essere lasciata come esercizio allo studente.

La trave elastica.

L'ipotesi di elasticità consente di stabilire le relazioni che legano le caratteristiche di sollecitazione alle caratteristiche di deformazione. Già abbiamo dedotto, parlando di Bernoulli, l'equazione che connette il momento flettente M alla curvatura κ :

$$M = EJ \kappa \quad (1.28)$$

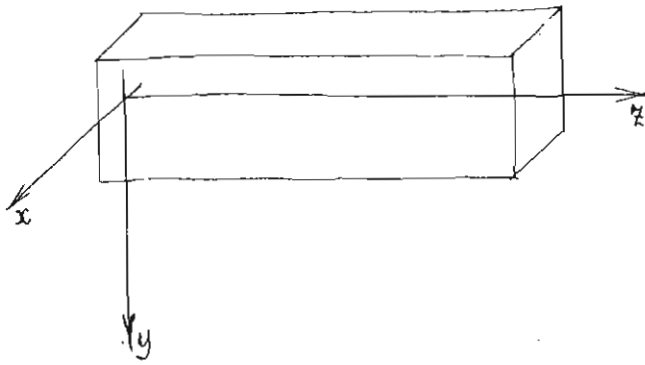
Ora dobbiamo cercare le altre equazioni di legame che definiscono la trave elastica. A questo scopo utilizziamo i risultati ottenuti, nel Capitolo VI, sul cilindro di De Saint Venant: in particolare quelli attinenti alla teoria della presso-tenso-flessione e alla teoria approssimata del taglio.

Come sappiamo, un cilindro elastico (vedi fig.) soggetto ai suoi estremi a forza normale N e a momento flettente M_x è sollecitato in tutti i suoi punti da una tensione normale

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x} \quad (1.29)$$

cui resta associata la deformazione

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E} \left(\frac{N}{A} + \frac{M_x y}{J_x} \right) \quad (1.30)$$



In presenza di sollecitazioni di taglio T_y la tensione tangenziale σ_{zy} è offerta, secondo la formula di Jourawski, dalla:

$$\sigma_{zy} = \frac{T_y S'_x}{J_x b} \quad (1.31)$$

cui è associata la deformazione

$$\epsilon_{zy} = \frac{1}{2G} \frac{T_y S'_x}{J_x b}$$

Poniamoci appunto nel caso in cui le uniche componenti di tensione diverse da zero sono σ_{zz} e σ_{zy} ; avendo esclusa l'eventuale presenza di M_y e di T_x , non può esser ragione di ambiguità l'omettere nelle (1.29) (1.31) gli indici; per cui scriveremo semplicemente:

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{J} \quad \sigma_{zy} = \frac{T S'}{J b} \quad (1.32)$$

Sappiamo ancora che la densità di energia di deformazione nel nostro caso è definita (cfr. Green) dalla:

$$\varphi = \frac{1}{2} (\sigma_{zz} \epsilon_{zz} + 2 \sigma_{zy} \epsilon_{zy}) \quad (1.33)$$

Sostituendo alle σ e alle ϵ le loro espressioni otteniamo:

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA^2} + \frac{2NM}{EAJ} y + \frac{M^2}{EJ^2} y^2 + \frac{T^2 S'^2}{GJ^2 b^2} \right) \quad (1.34)$$

Ora consideriamo un tronco del cilindro di lunghezza infinitesima dz : l'energia elastica complessiva compresa in tale tronco è data da:

$$\Phi = dz \int_A \varphi dA = \frac{dz}{2} \int_A \left(\frac{N^2}{EA^2} + \frac{2NM}{EAJ} y + \frac{M^2}{EJ^2} y^2 + \frac{T^2 S'^2}{GJ^2 b^2} \right) dA = \frac{dz}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M^2}{EJ} + \frac{T^2}{GK} \right) \quad (1.35)$$

dove si è tenuto conto del fatto che, essendo l'asse x baricentrico, è nullo il termine relativo al momento statico, e dove si è posto:

$$K = \left[\frac{1}{J^2} \int_A \frac{S'^2}{b^2} dA \right]^{-1} \quad (1.36)$$

È agevole riconoscere che K ha la dimensione di una superficie. In virtù di questa osservazione si può porre $K = A/\chi$ dove χ è una grandezza adimensionale detta "fattore di taglio" che dipende soltanto dalla "forma" e non dalle dimensioni della sezione. Per le sezioni circolari ed ellittiche si trova $\chi = \frac{10}{9}$, per le sezioni rettangolari $\chi = \frac{6}{5}$.

I prodotti EA , EJ , GK prendono il nome di "rigidezze" relative alle diverse caratteristiche di sollecitazione.

Per incrementi infinitesimi dN , dT , dM della sollecitazione, il lavoro elementare di deformazione elastica nel tronco di cilindro considerato deve risultare:

$$d\Phi = dz \left(\frac{N}{EA} dN + \frac{T}{GK} dT + \frac{M}{EJ} dM \right) \quad (1.37)$$

A questo punto interpretiamo il cilindro elastico per il quale resta definita la () come struttura monodimensionale descrivibile cioè in termini di caratteristiche (di sollec. e di deform.). Associando alle deformazioni ϵ , γ , κ le variazioni dN , dT , dM delle sollecitazioni corrispondenti ad un incremento infinitesimo di tali deformazioni, si ottiene per ogni elemento infinitesimo di trave dz l'espressione del lavoro "interno" δL_f^{int} :

$$\delta L_f^{int} = dz (\epsilon dN + \gamma dT + \kappa dM) \quad (1.38)$$

Ebbene, se riteniamo ugualmente ammissibili i due modelli fisici della trave (cioè il modello tridimensionale del cilindro elastico e il modello della struttura monodimensionale) ci si impone il confronto tra la (1.37) e la (1.38). Poiché il significato meccanico della (1.37) e della (1.38) è, nell'ambito dei rispettivi modelli, lo stesso, dobbiamo scrivere:

$$\frac{N}{EA} dN + \frac{T}{GK} dT + \frac{M}{EJ} dM = \epsilon dN + \gamma dT + \kappa dM \quad (1.39)$$

Di qui seguono, per l'indipendenza delle variabili N, T, M , le relazioni:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} \quad \gamma = \frac{T}{GK} \quad \kappa = \frac{M}{EJ} \quad (1.40)$$

Esse rappresentano il legame elastico tra le caratteristiche della deformazione e le caratteristiche della sollecitazione.

Le equazioni fondamentali delle travi elastiche

Componendo le equazioni indefinite dell'equilibrio (1.2) con le equazioni indefinite di congruenza (1.9) tramite le equazioni di legame (1.40), si ottengono, in analogia a quel che si è già effettuato per il corpo elastico generale (vedi pag. 117), le seguenti tre equazioni che riassumono, in unico sistema, l'equilibrio, la congruenza e il legame:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(EA \frac{dw}{dz} \right) + r(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left[GK \left(\frac{dv}{dz} + \varphi \right) \right] + q(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d\varphi}{dz} \right) + m(z) &= GK \left(\frac{dv}{dz} + \varphi \right) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Ad esse si attribuisce, spesso, la denominazione convenzionale di "equazioni di Navier" per la trave elastica. Naturalmente, l'equazione euleriana della linea elastica è implicita nella seconda e nella terza delle (1.41), ove si trascuri l'effetto deformativo della forza di taglio. Posto infatti $\gamma = 0$, segue:

$$\varphi = - \frac{dv}{dz} \quad (1.42)$$

Derivando una volta, rispetto a z , la terza delle (1.41) e tenendo conto della seconda si ha poi:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d\varphi}{dz} \right) + \frac{dm}{dz} = -q(z)$$

Quindi, per la (1.42), si trae la:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2v}{dz^2} \right) - \frac{dm}{dz} = q(z)$$

che coincide con la (*) di pag. 36 quando si abbia, ad es., $m(z) \equiv 0$.

7. 2. LA MECCANICA DELLE STRUTTURE NELLA EVOLUZIONE DELL' INGEGNERIA FERROVIARIA.

Riprendiamo ora la trattazione storica. Parleremo dei contributi fondamentali per la meccanica delle strutture che maturarono nella seconda metà dell' 800.

"La costruzione delle prime ferrovie influì molto sullo sviluppo della Scienza delle Costruzioni presentando un complesso di nuovi problemi (soprattutto attinenti ai ponti) che dovevano essere risolti. I materiali usati per la costruzione dei ponti erano allora la pietra e la ghisa. Era noto che quest'ultima prestava ottima resistenza a compressione nei ponti ad arco, ma che travature in ghisa erano malricure, perché il materiale è sensibile alla fatica, sotto l'azione delle tensioni variabili che sono prodotte dai carichi mobili. Si tentò anche, senza molto successo, l'uso di travature in ghisa rinforzate da membrature tese in ferro. Divenne necessario introdurre un materiale più sicuro; e, dopo il 1840, l'uso del ferro nella costruzione dei ponti acquistò rapidamente credito. In ponti di piccola luce vennero molto comuni in ferro le travate piane con sezioni a I, ma per strutture di maggiori dimensioni fu chiaro che altri schemi si richiedevano per sopportare le sollecitazioni indotte dai treni. Esistevano già ponti sospesi di grande luce, ma la loro flessibilità eccessiva li rendeva inutilizzabili per il traffico ferroviario.

Erano necessarie strutture più rigide; si tentò così la soluzione di ponti tubolari nella costruzione della ferrovia Londra - Chester - Holyhead in Inghilterra. Nel corso di quest'opera, gli ingegneri incontrarono notevoli difficoltà per l'attraversamento del fiume Conway e dello stretto di Menai. Si richiedeva che i ponti non creassero ostacoli alla navigazione, sicché i ponti ad arco, inizialmente proposti, si rivelarono inammissibili. L'ingegnere capo Robert Stephenson (figlio di Giorgio S. il "padre delle ferrovie") suggerì la costruzione di ponti a sezione tubolare di sufficiente larghezza perché i treni vi potessero passar dentro. Stephenson chiese (1845) l'assistenza di W. Fairbairn che aveva conseguito grande esperienza nelle strutture metalliche per l'ingegneria navale, perché lo aiutasse a sviluppare questa nuova idea per la costruzione di ponti di luce inusitata (la caminata

più lunga era 460 ft)." [Da S. Timoshenko : History of Strength of Materials, McGraw-Hill, New-York 1953, p. 156]

William Fairbairn (1789-1874) era nato a Kelso (Scozia) da un fattore. A 15 anni si impiegò come apprendista meccanico presso Percy Main Colliery (North Shields). Per il resto, autodidatta. Figura tipica di tecnico e di ingegnere inglese, raggiunse il successo per certe geniali invenzioni e innovazioni meccaniche per la filatura del cotone, e approfondì in modo acuto notevoli problemi nell'ambito della sperimentazione. I risultati delle sue ricerche su modelli per i ponti tubolari sono raccolti nel saggio "An account on the Construction of the Britannia and Conway tubular bridges" London 1849. Egli si rese chiaramente ragione dell'importanza dell'instabilità dell'equilibrio nelle parti compresse per la sicurezza della struttura. Il grande ponte Britannia sullo stretto di Menai fu completato nel 1850: si compone di due campate centrali di 144 metri e di due travate laterali di 74 metri, ed ha la forma di un lungo tubo rettangolare a pareti piene dominante il mare da una altezza di 30 metri (Cfr. J. Dumont : Les grands travaux du siècle, Paris 1891).

La costruzione di questo ponte e di quello sul Conway influì in modo notevolissimo sullo sviluppo delle conoscenze strutturali. Infatti, in quell'occasione fu messa a punto una tecnica di verifica fondata sull'uso di modelli; furono studiati sotto il profilo statico e tecnologico i diversi elementi e i collegamenti; furono previsti gli effetti del vento e del soleggiamento non uniforme.

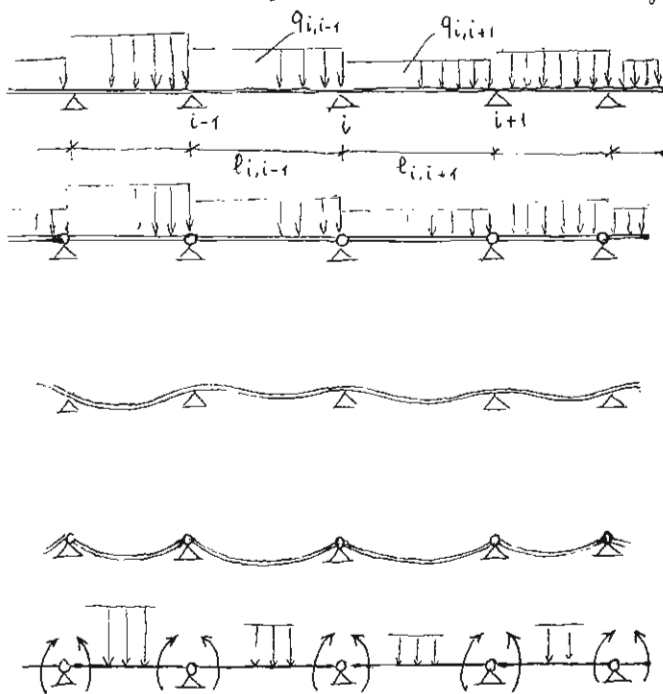
Ciò che più conta, però, ai fini del discorso che si vuol qui svolgere, è l'interesse che questi ponti tubolari suscitarono presso tecnici e scienziati stranieri; descrizioni delle opere si trovano in numerosi libri e saggi riguardanti la resistenza dei materiali e la teoria delle strutture.

In particolare si occuparono del ponte Britannia Jourawski (trad. franc. in Ann. Ponts et Chaussées, Vol. 20 (1860)) e Clapeyron. Per brevità non menzioneremo le osservazioni di Jourawski, nonostante il loro intrinseco interesse in tema di stabilità e resistenza alle sollecitazioni tangenziali. Ci soffermeremo invece sullo studio fondamentale di Clapeyron, che fu elaborato anche in vista della ricostruzione del ponte di Asnières presso Parigi (1849).

La trave continua. Equazione di Bertot - Clapeyron

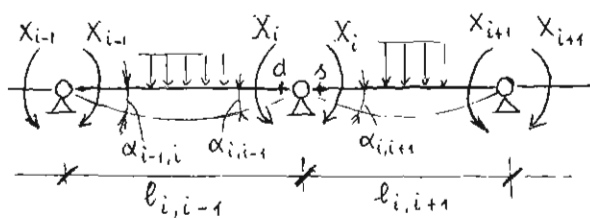
I risultati ottenuti da Clapeyron si riferiscono all'analisi della trave continua (su più campate); essi furono presentati in una memoria alla Accademia delle Scienze parecchi anni appresso, nel 1857 (Comptes Rend. 45, p. 1076), dove appunto è discussa criticamente la soluzione adottata nel ponte Britannia.

La situazione considerata inizialmente da Clapeyron è quella più semplice di una trave continua di uniforme rigidità su un numero di appoggi maggiore di due, soggetta a distribuzioni uniformi di carico su ogni campata.



Se in luogo del sistema effettivo così definito si prende in esame il sistema isostatico (sistema principale) costituito da più travi ad una campata collegate fra loro mediante cerniere, ci si rende facilmente conto che il comportamento deformativo del sistema principale potrà identificarsi con quello del sistema effettivo se si riterrà il sistema principale soggetto, oltre che ai carichi, anche a momenti iperstatici X_i applicati, come in figura, in corrispondenza di ogni cerniera. L'effetto di tali momenti iperstatici deve

essere tale da compensare le rotazioni mutue dovute ai carichi tra le due facce delle connessioni che si sono operate, nel sistema principale, mediante le cerniere.



Riferiamoci all'appoggio i -esimo. Alla estremità di destra (d) della campata $l_{i-1,i}$ e all'estremità di sinistra (s) della campata $l_{i,i+1}$ agiscono i momenti X_i

(nel complesso autoequilibrati!): essi sono posti, a priori, positivi; naturalmente la soluzione confermerà o confuterà questa posizione. Quindi in (d) opera un momento antiorario e in (s) un momento orario. Indichiamo con $\alpha_{i-1,i}$ la rotazione in (d) e con $\alpha_{i,i+1}$ la rotazione in (s), e riteniamole positive se concordi con il verso dell'iperstatica relativa: quindi $\alpha_{i-1,i}$ è positiva se antioraria e $\alpha_{i,i+1}$ è positiva se oraria.

Ora è chiaro che sia $\alpha_{i,i-1}$, sia $\alpha_{i,i+1}$ si compongono di due contributi: il contributo α' del carico e il contributo α'' delle iperstatiche. Si noti che $\alpha_{i,i-1}$ è influenzata soltanto dalle iperstatiche X_i, X_{i-1} , e $\alpha_{i,i+1}$ soltanto dalle iperstatiche X_i, X_{i+1} . Pertanto è lecito porre:

$$\begin{aligned}\alpha_{i,i-1} &= \alpha'_{i,i-1}(q_{i,i-1}) + \alpha''_{i,i-1}(X_i, X_{i-1}) \\ \alpha_{i,i+1} &= \alpha'_{i,i+1}(q_{i,i+1}) + \alpha''_{i,i+1}(X_i, X_{i+1})\end{aligned}\quad (2.1)$$

La condizione di cui si è parlato, cioè la condizione che afferma essere nulla la rotazione mutua in i tra (d) e (s) si esprime così:

$$\alpha_{i,i-1} + \alpha_{i,i+1} = 0 \quad (2.2)$$

Di qui segue l'equazione:

$$\alpha''_{i,i-1}(X_i, X_{i-1}) + \alpha''_{i,i+1}(X_i, X_{i+1}) = -\alpha'_{i,i-1}(q_{i,i-1}) - \alpha'_{i,i+1}(q_{i,i+1}) \quad (2.3)$$

dove si sono distinti, al primo membro, i termini contenenti le iperstatiche X_{i-1}, X_i, X_{i+1} , e al secondo membro i termini noti. Si vede subito che la (2.3) riguarda tre momenti incogniti e può essere scritta per tutte le sezioni operate. La (2.3) prende appunto il nome di equazione dei tre momenti.

La sua esplicitazione è immediata; utilizzando i metodi già noti per la determinazione di spostamenti e rotazioni nelle travi elastiche, si riconosce facilmente che è (vedi pag. 42), nel caso di rigidezza EJ costante:

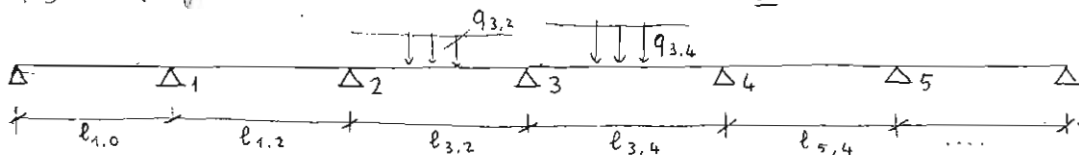
$$\begin{aligned}\alpha''_{i,i-1}(X_{i-1}, X_i) &= \frac{l_{i,i-1}}{6EJ} X_{i-1} + \frac{l_{i,i-1}}{3EJ} X_i \\ \alpha''_{i,i+1}(X_i, X_{i+1}) &= \frac{l_{i,i+1}}{3EJ} X_i + \frac{l_{i,i+1}}{6EJ} X_{i+1} \\ \alpha'_{i,i-1}(q_{i,i-1}) &= \frac{q_{i,i-1} l_{i,i-1}^3}{24EJ} \\ \alpha'_{i,i+1}(q_{i,i+1}) &= \frac{q_{i,i+1} l_{i,i+1}^3}{24EJ}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Sostituendo tali valori in (2.3) si ottiene:

$$l_{i,i-1} X_{i-1} + 2(l_{i,i-1} + l_{i,i+1}) X_i + l_{i,i+1} X_{i+1} = -\frac{1}{4}(q_{i,i-1} l_{i,i-1}^3 + q_{i,i+1} l_{i,i+1}^3) \quad (2.5)$$

Questa è l'equazione ottenuta da Clapeyron. Va detto, sotto il profilo storico, che la (2.5) fu pubblicata due anni prima da Bertot (Mem. Soc. Ing. Civils de France, 8 (1855) ed è quindi talvolta a lui attribuita, anche se appare

plausibile l'ipotesi che Bertot avesse tratto lo spunto da indicazioni dello stesso Clapeyron (Cfr. Bresse: Ann. Ponts et Chaussées, 20, 1860).



Applicando la (2.5) alle diverse cerniere si ottiene il sistema di equazioni

lineari:

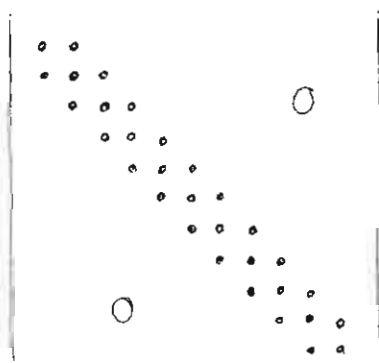
$$2(l_{1,0} + l_{1,2})X_1 + l_{1,2} X_2 = -\frac{1}{4}(q_{1,0}l_{1,0}^3 + q_{1,2}l_{1,2}^3)$$

$$l_{2,1} X_1 + 2(l_{2,1} + l_{2,3})X_2 + l_{2,3} X_3 = -\frac{1}{4}(q_{2,1}l_{2,1}^3 + q_{2,3}l_{2,3}^3)$$

$$l_{3,2} X_2 + 2(l_{3,2} + l_{3,4})X_3 + l_{3,4} X_4 = -\frac{1}{4}(q_{3,2}l_{3,2}^3 + q_{3,4}l_{3,4}^3)$$

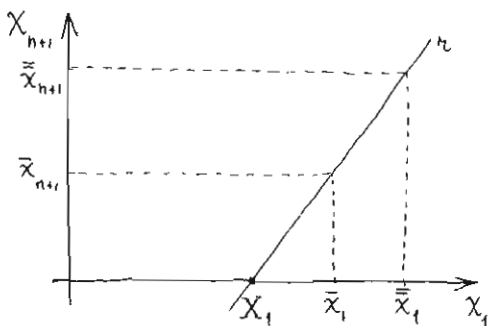
$$l_{n,n-1} X_{n-1} + 2(l_{n,n-1} + l_{n,n+1})X_n = -\frac{1}{4}(q_{n,n-1}l_{n,n-1}^3 + q_{n,n+1}l_{n,n+1}^3)$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è a banda (vedi fig.).



Ciò consente notevoli semplificazioni nei calcoli; una elegante tecnica di soluzione è stata proposta da Bertot. Egli suggerisce di scrivere l'ultima equazione come se sull'ultimo appoggio agisse un momento X_{n+1} .

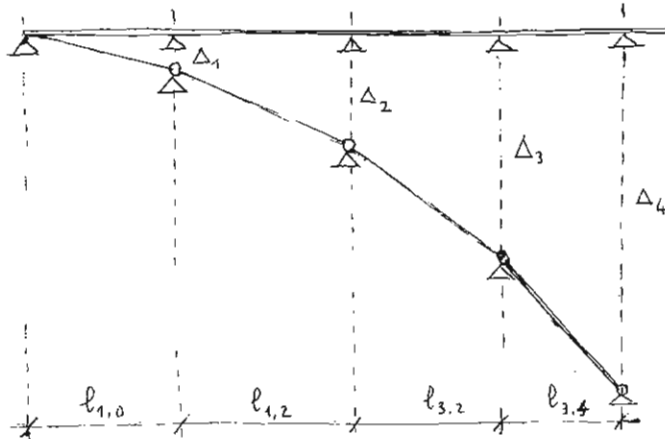
Ora, assegnato un valore arbitrario a X_1 (ad es. \bar{x}_1), dalla prima equazione si trae, in funzione di \bar{x}_1 , una determinazione di X_2 ; dalla seconda equazione si trae una determinazione di X_3 ; successivamente, dalla i -esima equazione si trae una determinazione di X_{i+1} ; infine, dall'ultima equazione si trae, in generale, una determinazione non nulla di X_{n+1} (ad es. \bar{x}_{n+1}). Il risultato corretto impone invece che X_{n+1} sia nullo.



Allora, si ripetono tutte le operazioni precedenti con un altro valore di X_1 (ad es. $\bar{\bar{x}}_1$) e si ottiene alla fine un altro valore per X_{n+1} (ad es. $\bar{\bar{x}}_{n+1}$). Poiché esiste una relazione lineare tra x_1 e x_{n+1} è a questo punto agevole trovare l'esatta valutazione di X_1 . Basta ad esempio ricorrere alla costruzione

grafica riportata in figura: X_1 è dato dall'intersezione della retta r con l'asse x_1 .

La (2.5) può essere agevolmente generalizzata. Consideriamo ad esempio il caso rappresentato in figura, dove il carico sulle diverse campate è assegnato in modo arbitrario e dove, inoltre, i diversi appoggi subiscono cedimenti verticali $\Delta_1, \Delta_2, \dots$.



Con riferimento ad un generico appoggio i , si riconosce che, a causa di tali cedimenti, le iperstatiche X_{i-1}, X_i, X_{i+1} debbono indurre una rotazione mutua in i che non solo contrasti la rotazione mutua, nel sistema principale, dal carico esterno, ma anche quella dovuta ai cedimenti. Tenendo conto delle convenzioni sui segni delle rotazioni $\alpha_{i,i-1}$ e $\alpha_{i,i+1}$, e indicando con α' il contributo del carico, con α'' quello delle iperstatiche, si avrà dunque:

$$\alpha_{i,i-1} = \alpha'_{i,i-1}(q_{i,i-1}) + \alpha''_{i,i-1}(X_i, X_{i-1}) - \frac{\Delta_i - \Delta_{i-1}}{l_{i,i-1}} \quad (2.6)$$

$$\alpha_{i,i+1} = \alpha'_{i,i+1}(q_{i,i+1}) + \alpha''_{i,i+1}(X_i, X_{i+1}) + \frac{\Delta_{i+1} - \Delta_i}{l_{i,i+1}}$$

L'equazione (2.3) è sostituita allora dalla seguente:

$$\alpha''_{i,i-1}(X_i, X_{i-1}) + \alpha''_{i,i+1}(X_i, X_{i+1}) = - \left[\alpha'_{i,i-1}(q_{i,i-1}) + \alpha'_{i,i+1}(q_{i,i+1}) \right] + \left[\frac{\Delta_{i-1} - \Delta_i}{l_{i,i-1}} - \Delta_i \left(\frac{1}{l_{i,i-1}} + \frac{1}{l_{i,i+1}} \right) + \frac{\Delta_{i+1}}{l_{i,i+1}} \right] \quad (2.7)$$

Si può dare una forma più esplicita ed espressa alla (2.7) ricordando che, per il corollario di Mohr $\alpha'_{i,i-1}$ e $\alpha'_{i,i+1}$ possono essere valutati, in ogni campata, come reazioni fittizie (positive se verso l'alto) della trave (ausiliaria) appoggiata, soggetta a un carico fittizio pari alla curvatura $\frac{M}{EJ}$. Risulta allora:

$$\alpha'_{i,i-1} = B^*_{i,i-1} \quad ; \quad \alpha'_{i,i+1} = A^*_{i,i+1} \quad (2.8)$$

Poiché la rigidezza della trave sia costante in ogni campata ma, possibilmente, diversa da campata a campata, si ha poi:

$$\alpha''_{i,i-1} = \frac{l_{i,i-1}}{6EJ_{i,i-1}} X_{i-1} + \frac{l_{i,i-1}}{3EJ_{i,i-1}} X_i \quad ; \quad \alpha''_{i,i+1} = \frac{l_{i,i+1}}{3EJ_{i,i+1}} X_i + \frac{l_{i,i+1}}{6EJ_{i,i+1}} X_{i+1} \quad (2.9)$$

Pertanto la (2.7) diventa:

$$\frac{l_{i,i-1}}{6EJ_{i,i-1}} X_{i-1} + \left(\frac{l_{i,i-1}}{3EJ_{i,i-1}} + \frac{l_{i,i+1}}{3EJ_{i,i+1}} \right) X_i + \frac{l_{i,i+1}}{6EJ_{i,i+1}} X_{i+1} =$$

$$= - \left(B_{i,i-1}^* + A_{i,i+1}^* \right) + \left[\frac{\Delta_{i-1}}{l_{i,i-1}} - \left(\frac{1}{l_{i,i-1}} + \frac{1}{l_{i,i+1}} \right) \Delta_i + \frac{\Delta_{i+1}}{l_{i,i+1}} \right] \quad (2.10)$$

Ad essa ci riferiremo, denominandola, come è ormai in uso, "equazione di Bertot-Clapeyron".

Il teorema di Clapeyron

Dobbiamo ricordare ancora un contributo fondamentale di Clapeyron che ci sarà molto utile in seguito. Si tratta di un teorema generale della teoria classica dell'elasticità (1) del quale però ci interessa ora soltanto l'applicazione alla teoria delle strutture monodimensionali. "Il lavoro compiuto dalle forze esterne sul corpo elastico (nella trave elastica) durante la sua deformazione eguaglia il doppio dell'energia elastica accumulata nel corpo (nella trave)."

Tale energia elastica ha, come è noto, l'espressione:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l (N\varepsilon + T\gamma + M\kappa) dz \quad (2.11)$$

e può essere scritta (in virtù delle equazioni di legame) in forma diretta:

(1) Tale teorema è citato nel libro fondamentale sulla teoria dell'elasticità di G. Lamé. L'amicizia tra G. Lamé (1795-1870) e B. P. E. Clapeyron (1799-1864) era iniziata dalla École Polytechnique dove l'uno e l'altro si erano diplomati; negli anni 1818/20 entrambi si trasferiscono in Russia, a S. Pietroburgo; ivi insegnano nella Scuola di Ingegneria delle Comunicazioni. Del 1828 è la loro memoria "Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes" che fu pubblicata nel 1833 dalla Accademia di Francia tra le "Mémoires présentées par divers Savants". In tale memoria si osserva per la prima volta la possibilità di dedurre le equazioni di Navier partendo dal concetto di tensione di Cauchy; viene introdotto il concetto di ellissoide delle tensioni in un punto e sono sviluppati e risolti numerosi casi particolari. Sempre a S. Pietroburgo Lamé e Clapeyron esercitano intensa attività professionale e di

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l (EA \varepsilon^2 + GK \gamma^2 + EJ \kappa^2) dz \quad (2.11)$$

o in forma "complementare":

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GK} + \frac{M^2}{EJ} \right) dz \quad (2.12)$$

Il lavoro delle forze esterne (supposte di intensità assegnata e costante, sezione per sezione) è dato da:

$$L = N_2 w_2 + T_2 v_2 + M_2 \varphi_2 - (N_1 w_1 + T_1 v_1 + M_1 \varphi_1) + \int_0^l (p w + q v + m \varphi) dz \quad (2.13)$$

Il teorema afferma dunque:

$$L = 2 \Phi \quad (2.14)$$

ossia:

$$N_2 w_2 + T_2 v_2 + M_2 \varphi_2 - (N_1 w_1 + T_1 v_1 + M_1 \varphi_1) + \int_0^l (p w + q v + m \varphi) dz = \int_0^l (N \varepsilon + T \gamma + M \kappa) dz \quad (2.15)$$

Ovvero, questa relazione è senz'altro valida: essa rappresenta l'equazione dei lavori virtuali quando si associ al sistema forze/caratteristiche di sollecitazione p, q, m, N, T, M , il sistema spostamenti/caratt. di deformazione virtuale costituito appunto dalle quantità $w, v, \varphi, \varepsilon, \gamma, \kappa$ derivanti dalla sollecitazione.

È bene osservare che la (2.14) prende un aspetto leggermente diverso (anche se permane il medesimo significato meccanico) qualora il lavoro esterno sia valutato con riferimento all'ipotesi di proporzionalità diretta tra forze

consulenza (ad esempio per la progettazione del grande ponte sospeso sul fiume Neva e di altri ponti presso la capitale russa, e per la ricostruzione della Cattedrale di S. Isaac a S. Pietroburgo). Tornati in Francia per ragioni politiche, continuarono l'attività nel campo dell'ingegneria ferroviaria. Ben presto però Lamé si dedicò esclusivamente alla ricerca scientifica e all'insegnamento. Nel 1852 uscì il libro di cui si è parlato "Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides" (il primo vero trattato in materia); Lamé approfondì successivamente i suoi studi nello stesso campo. Clapeyron cominciò l'insegnamento nel 1844 con un corso sulle macchine a vapore. Entrambi gli scienziati, Lamé nel 1843 e Clapeyron nel 1858 divennero membri dell'Accademia di Francia.

agenti nella struttura e corrispondenti spostamenti. In tal caso l'espressione () non è adeguata poiché ivi il lavoro è espresso dal prodotto del valore "finale" assunto dalla forza per lo spostamento complessivo ad essa associato. Sappiamo invece che se, ad esempio, la forza N è linearmente proporzionale a w secondo la $N = k w$ (con $k = \text{cost.}$) il lavoro compiuto da N è:

$$\int_0^w N dw = \int_0^w k w dw = \frac{1}{2} k w^2 = \frac{1}{2} N w$$

Ossia, se si tien conto del processo di carico della struttura in cui si pervenga allo stato finale di spostamento e di carico mediante l'aggiunta di incrementi infinitesimi delle forze e degli spostamenti corrispondenti, il lavoro complessivo è fornito da

$$L^* = \frac{L}{2} \quad (2.16)$$

Allora la (2.14) diventa:

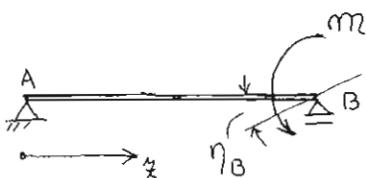
$$L^* = \Phi \quad (2.17)$$

L'alternativa tra (2.17) e (2.14) può esser superata esprimendo semplicemente una relazione tra il differenziale del lavoro esterno e il differenziale dell'energia. Ad ogni incremento dL del lavoro esterno corrisponde un pari incremento $d\Phi$ dell'energia elastica secondo la:

$$dL = d\Phi \quad (2.18)$$

questa è infatti nient'altro che una immediata conseguenza del teorema dei lavori virtuali, poiché ne rappresenta la particolare applicazione al caso in cui la variazione venga fatta coincidere con il differenziale.

Un' applicazione (poco importante)



Utilizziamo il teorema di Clapeyron per determinare la rotazione in B, η_B . Dalla () segue:

$$\mathcal{M} \eta_B = \int_0^l \left(\frac{T^2}{GK} + \frac{M^2}{EJ} \right) dz$$

D'altra parte si ha: $M(z) = \frac{mz}{l}$, $T(z) = \frac{m}{l}$. Pertanto la rotazione è fornita dalla:

$$\eta_B = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_0^l \left(\frac{m^2 z^2}{EJ l^2} + \frac{m^2}{l^2 GK} \right) dz = \frac{1}{\mathcal{M}} \left[\frac{m^2 l^3}{3 l^2 EJ} + \frac{m^2}{l^2 GK} l \right] = \frac{m l}{3 EJ} + \frac{m}{l GK}$$

che differisce dalla (5) di pag. 42 per il termine che tien conto della deformazione a taglio.

7. 3. IL CONTRIBUTO DI MENABREA E DI CASTIGLIANO ALLA MECCANICA DELLE STRUTTURE

Il problema fondamentale che si pone alla meccanica delle strutture monodimensionali è quello della determinazione dello stato di sollecitazione e di spostamento in qualsiasi punto, sia nel caso di strutture isostatiche, sia nel caso di strutture iperstatiche. Per le prime, come è noto, l'analisi della sollecitazione non presenta difficoltà concettuali poiché è svolta mediante la semplice applicazione delle leggi della statica; resta invece ancora da esaminare la possibilità di mettere a punto procedimenti generali per la determinazione dello stato di spostamento meno laboriosi di quelli derivanti dalla soluzione diretta dell'equazione della linea elastica (o in generale delle "equazioni di Navier"; cfr. pag. 157), e meno restrittivi di quelli derivanti dal corollario di Mohr (cfr. pag. 39).

Per le seconde, e cioè per le strutture iperstatiche, l'analisi della sollecitazione esige che oltre a considerazioni di equilibrio intervengano considerazioni di congruenza, come si è già veduto su esempi particolari. Essa naturalmente costituisce un problema preliminare che occorre sia in generale risolto per accedere alla determinazione dello stato di spostamento.

In questo paragrafo si parlerà di alcuni importanti risultati conseguiti da Menabrea e da Castigliano che consentiranno la soluzione dei problemi sopra richiamati, per un'ampia classe di casi strutturali.

Luigi Federico Menabrea⁽¹⁾ (1809, 1896).

Il generale L. F. Menabrea presentò nel 1857 all'Accademia delle Scienze di Torino una memoria in cui era introdotto un principio di elasticità: tale principio affermava che in un sistema elastico in equilibrio (si aggiunga: in cui i vincoli sono o perfetti o cedevoli elasticamente) l'energia potenziale elastica, scritta nella forma complementare, cioè in funzione delle sollecitazioni,

(1) Nato a Chambéry; presidente del Comitato del Genio Militare, generale, statista, ministro, senatore. Deputato nel 1858; maggior generale nel 1859, si segnalò a Palestro, a Solferino, dove meritò il titolo di Marchese di Val Dora per la difesa da lui ideata di quella valle. Diresse gli assedi di Ancona, Capua, Gaeta. Nel 1866 firmò il trattato di Briga e prese possesso di Venezia. Più volte ministro e dal 1867 al 1869 pres. del Consiglio.

assume il valor minimo in corrispondenza dell'effettiva configurazione conseguita dal sistema deformato. Successivamente, il Menabrea tentò più volte, ma senza successo, di fornire una dimostrazione rigorosa e generale, in una memoria presentata all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1858 e in una memoria presentata all'Accademia di Torino nel 1868.

Assumiamo, temporaneamente, l'enunciato di Menabrea come principio e non come teorema; esso si inserisce allora nell'ambito di quelle importazioni della meccanica che, sin dal secolo XVIII, come abbiamo veduto, facevano uso della teleonomia e delle "cause finali": si pensi ad esempio al principio della minima azione di Maupertuis (vedi pag. 67)

Consideriamo ad esempio una struttura una volta iperstatica, come quella della figura. Con riferimento al sistema principale rappresentato nella figura successiva, l'energia potenziale Φ , scritta nella forma complementare, ha la forma

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GK} + \frac{M^2}{EJ} \right) dz \quad (3.1)$$

Le caratteristiche di sollecitazioni valgono:

$$\begin{aligned} N &= q \cos \alpha \cdot z - \cos \alpha \cdot X_1 \\ T &= q \sin \alpha \cdot z - \sin \alpha \cdot X_1 \\ M &= -q \sin \alpha \cdot \frac{z^2}{2} + \sin \alpha \cdot z \cdot X_1 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Si possono distinguere in N, T, M due contributi: quello del carico esterno agente sul sistema principale isostatico, e quello dell'iperstatica X_1 (agente sempre sul sistema principale); indichiamo il primo contributo con N_0, T_0, M_0 . Per quanto riguarda il secondo, osserviamo che si tratta di espressioni linearmente proporzionali a X_1 : esse quindi possono essere espresse nella forma $N_1 X_1, T_1 X_1, M_1 X_1$, dove N_1, T_1, M_1 sono le caratteristiche di sollecitazione indotte sul sistema principale da una forza applicata come X_1 , ma di intensità unitaria. Le (3.2) prendono dunque la forma:

$$N = N_0 + N_1 X_1 \quad T = T_0 + T_1 X_1 \quad M = M_0 + M_1 X_1 \quad (3.3)$$

dove, nel caso specifico, si ha:

$$N_0 = q \cos \alpha \cdot z; \quad T_0 = q \sin \alpha \cdot z, \quad M_0 = -q \sin \alpha \cdot \frac{z^2}{2}; \quad N_1 = -\cos \alpha; \quad T_1 = -\sin \alpha; \quad M_1 = \sin \alpha \cdot z$$

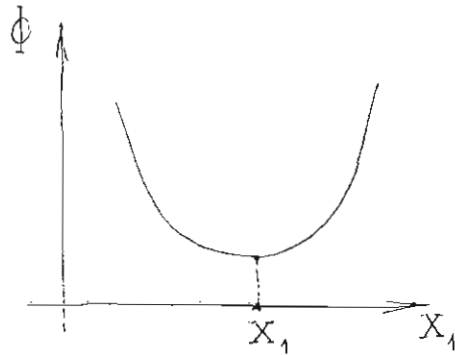
Introducendo le (3.3) nella (3.1) si ottiene per Φ la espressione:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l \left(\frac{N_0^2}{EA} + \frac{T_0^2}{GK} + \frac{M_0^2}{EJ} \right) dz + 2X_1 \int_0^l \left(\frac{N_0 N_1}{EA} + \frac{T_0 T_1}{GK} + \frac{M_0 M_1}{EJ} \right) dz + X_1^2 \int_0^l \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{T_1^2}{GK} + \frac{M_1^2}{EJ} \right) dz \right\} \quad (3.4)$$

ed è lecito porre:

$$\Phi = \Phi(q, X_1) \quad (3.5)$$

Ora, al variare di X_1 la funzione Φ assume valori diversi (sempre non negativi). Ebbene il principio di Menabrea ci dice che il valor vero assunto da Φ nella struttura considerata è il minimo tra tutti i valori corrispondenti alle possibili



determinazioni della variabile X_1 . Ciò vuol dire che, quando X_1 è pari alla reazione iperstatica effettivamente agente sulla struttura, la funzione Φ è estrema e dunque presenta derivato nullo rispetto a X_1 : vale cioè la:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = 0 \quad (3.6)$$

Questa stessa equazione può essere usata per determinare l'iperstatica. Infatti, dalla (3.4), effettuando la derivazione, si ottiene:

$$\int_0^l \left(\frac{N_0 N_1}{EA} + \frac{T_0 T_1}{GK} + \frac{M_0 M_1}{EJ} \right) dz + X_1 \int_0^l \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{T_1^2}{GK} + \frac{M_1^2}{EJ} \right) dz = 0 \quad (3.7)$$

Si noti che le funzioni sotto segno di integrale sono note, poiché determinabili con sole considerazioni di statica applicate al sistema principale. Quindi anche gli integrali sono calcolabili e figurano nella (3.7) come termine noto e come coefficiente dell'incognita X_1 , rispettivamente. Si vuole introdurre le notazioni:

$$\eta_{10} = \int_0^l \left(\frac{N_0 N_1}{EA} + \frac{T_0 T_1}{GK} + \frac{M_0 M_1}{EJ} \right) dz \quad (3.8)$$

$$\eta_{11} = \int_0^l \left(\frac{N_1^2}{EA} + \frac{T_1^2}{GK} + \frac{M_1^2}{EJ} \right) dz$$

Vedremo in seguito il significato meccanico di η_{10} e di η_{11} . Per ora riscriviamo la (3.7) così:

$$\eta_{10} + \eta_{11} X_1 = 0 \quad (3.9)$$

da cui si trae:

$$X_1 = - \frac{\eta_{10}}{\eta_{11}} \quad (3.10)$$

Per l'esempio prima considerato, si ha:

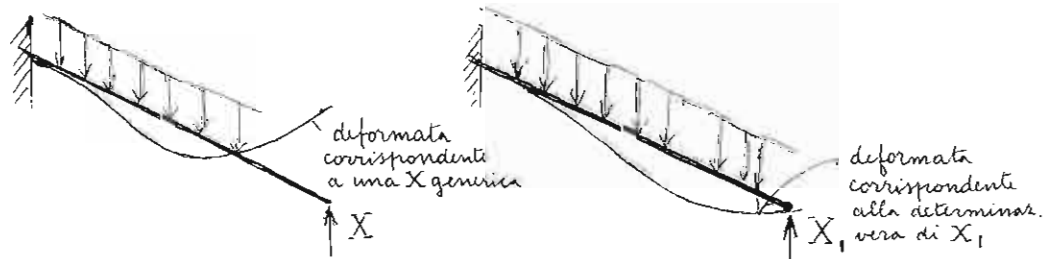
$$\eta_{10} = \int_0^l \left(- \frac{q \cos^2 \alpha}{EA} z - \frac{q \sin^2 \alpha}{GK} z - \frac{q \sin^2 \alpha}{EJ} \frac{z^3}{2} \right) dz = - \left[\frac{q \cos^2 \alpha \cdot l^2}{2EA} + \frac{q \sin^2 \alpha \cdot l^2}{2GK} + \frac{q \sin^2 \alpha \cdot l^4}{8EJ} \right]$$

$$\eta_{11} = \int_0^l \left(\frac{\cos^2 \alpha}{EA} + \frac{\sin^2 \alpha}{GK} + \frac{\sin^2 \alpha}{EJ} z^2 \right) dz = \frac{\cos^2 \alpha}{EA} l + \frac{\sin^2 \alpha}{GK} l + \frac{\sin^2 \alpha}{3EJ} l^3$$

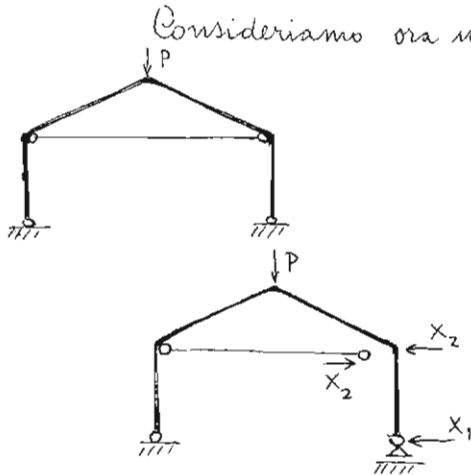
è quindi:

$$X_1 = \frac{\frac{q \cos^2 \alpha}{2EA} l^2 + \frac{q \sin^2 \alpha}{2GK} l^2 + \frac{q \sin^2 \alpha}{8EJ} l^4}{\frac{\cos^2 \alpha}{EA} l + \frac{\sin^2 \alpha}{GK} l + \frac{\sin^2 \alpha}{3EJ} l^3}$$

Torniamo per un momento alla dipendenza funzionale di Φ da X_1 . Che significa attribuire a X_1 determinazioni diverse da quella vera? Si può osservare che qualsiasi valore si dia ad X_1 , il sistema principale è staticamente risolubile, ossia è staticamente compatibile. La statica da sola non è in grado di operare la scelta della determinazione vera. La scelta è invece effettuabile se si tien conto della della deformazione: l'unica determinazione vera è quella che corrisponde ad uno stato di spostamento rispondente a quanto è richiesto dal vincolo in B. (Vedi la figura).



Si può dire allora che la funzione $\Phi(q, X_1)$ "esplora" la classe degli stati di sollecitazione staticamente ammissibili. Invece la (3.6) determina entro la classe suddetta quell'unico stato di sollecitazione che, oltre ad essere staticamente ammissibile, è anche geometricamente ammissibile. Si intuisce perciò che la (3.9) esprime una condizione di congruenza: infatti, come vedremo, essa afferma che lo spostamento verticale del punto di applicazione dell'iperstatica X_1 è nullo.



Consideriamo ora una struttura più volte iperstatica. Per fissare le idee ci possiamo riferire a quella della figura accanto. Rispetto ad un qualunque sistema principale, si individuano le iperstatiche X_1, X_2, \dots, X_n (nel caso specifico X_1, X_2) che possono rappresentare sia reazioni vincolari (nell'es. X_1), sia sollecitazioni interne (nell'es. X_2).

Le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione della travatura possono essere scritte nella forma:

$$\begin{aligned} N &= N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_n X_n \\ T &= T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + \dots + T_n X_n \\ M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

dove N_0, T_0, M_0 rappresentano la forza normale, il taglio e il momento flettente indotti nel sistema principale dal solo carico esterno, ed N_h, T_h, M_h ($h=1, 2, \dots, n$) rappresentano le caratteristiche di sollecitazione indotte nel sistema principale da una forza unitaria avente il punto di applicazione, la direzione e il verso di X_i .

L'energia potenziale elastica (complementare) complessiva ha dunque l'aspetto:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k}{EA} + \frac{T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k}{GK} + \frac{M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k}{EJ} \right) ds \quad (3.12)$$

dove l'integrale è esteso a tutta la struttura S e dove s denota l'ascissa curvilinea che la descrive. Si riconosce perciò che al variare di X_k ($k=1, 2, \dots, n$)

Φ ne è funzione:

$$\Phi = \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3.13)$$

Il "principio di elasticità" proposto da Menabrea afferma che, in corrispondenza del valor vero delle X_k , Φ è estrema, e quindi valgono le:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_h} = 0 \quad h=1, 2, \dots, n \quad (3.14)$$

Le (3.14) costituiscono n equazioni lineari nelle incognite X_h e ne consentono pertanto la determinazione. Rendendo esplicita la derivata parziale di Φ rispetto a X_h , le (3.14) si traducono nelle:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_k} = \int_S \left(\frac{N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k}{EA} N_k + \frac{T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k}{GK} T_k + \frac{M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k}{EJ} M_k \right) ds = 0 \quad (3.15)$$

ovvero nelle :

$$\int_S \left(\frac{N_0 N_k}{EA} + \frac{T_0 T_k}{GK} + \frac{M_0 M_k}{EJ} \right) ds + \sum_{k=1}^n X_k \int_S \left(\frac{N_k N_k}{EA} + \frac{T_k T_k}{GK} + \frac{M_k M_k}{EJ} \right) ds = 0 \quad (3.16)$$

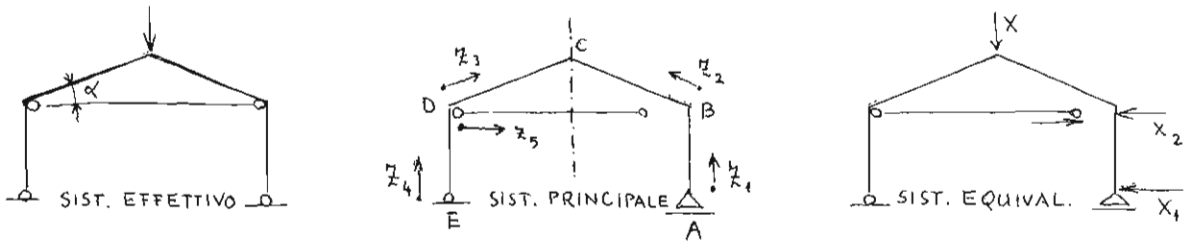
che possono essere scritte sinteticamente così :

$$\eta_{h0} + \sum_{k=1}^n \eta_{kh} X_k = 0 \quad (3.17)$$

avendo posto :

$$\eta_{h0} = \int_S \left(\frac{N_0 N_h}{EA} + \frac{T_0 T_h}{GK} + \frac{M_0 M_h}{EJ} \right) ds ; \quad \eta_{kh} = \eta_{hk} = \int_S \left(\frac{N_k N_h}{EA} + \frac{T_k T_h}{GK} + \frac{M_k M_h}{EJ} \right) ds \quad (3.18)$$

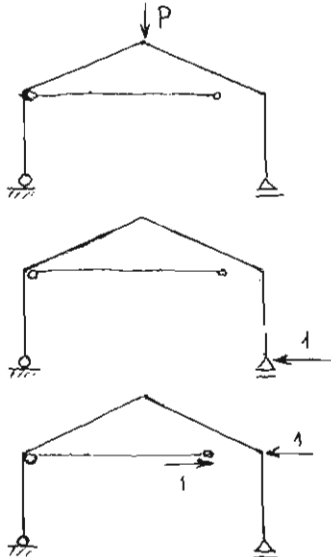
Esempio (E, J, A costanti dappertutto)



Riferiamo la struttura alle ascisse segnate in figura (z_1 è utilizzato per il tratto AB, z_2 per il tratto BC, z_3 per il tratto DC ecc.). Essendo il sistema due volte iperstatico le equazioni (3.17) diventano :

$$\begin{aligned} \eta_{10} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 &= 0 \\ \eta_{20} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Per determinare i termini η_{10}, η_{20} e i coefficienti $\eta_{11}, \eta_{12} = \eta_{21}, \eta_{22}$



consideriamo i seguenti problemi isostatici: il primo descrive il sistema principale soggetto al solo carico esterno e la sua soluzione fornisce N_0, T_0, M_0 ; il secondo descrive il sistema principale soggetto a una forza unitaria disposta come X_1 e la sua soluzione fornisce N_1, T_1, M_1 ; il terzo infine descrive il sistema principale soggetto a due forze uguali ed opposte di intensità unitaria disposte come X_2 e la sua soluzione fornisce N_2, T_2, M_2 . Le determina =

zioni di N_0, T_0, \dots, M_2 sono riportate nella tabella:

	N_0	T_0	M_0	N_1	T_1	M_1	N_2	T_2	M_2
AB	$-P/2$	0	0	0	1	$-1 \cdot \frac{z_1}{l}$	0	0	0
BC	$-P/2 \sin \alpha$	$-P/2 \cos \alpha$	$P/2 \cos \alpha \cdot \frac{z_2}{l}$	$-1 \cos \alpha$	$1 \sin \alpha$	$-1 \sin \alpha \cdot \frac{z_2}{l}$	$-1 \cos \alpha$	$1 \sin \alpha$	$-1 \sin \alpha \cdot \frac{z_2}{l}$
DC	$-P/2 \sin \alpha$	$+P/2 \cos \alpha$	$P/2 \cos \alpha \cdot \frac{z_3}{l}$	$-1 \cos \alpha$	$-1 \sin \alpha$	$-1 \sin \alpha \cdot \frac{z_3}{l}$	$-1 \cos \alpha$	$-1 \sin \alpha$	$-1 \sin \alpha \cdot \frac{z_3}{l}$
ED	$-P/2$	0	0	0	-1	$-1 \cdot \frac{z_4}{l}$	0	0	0
DB	0	0	0	0	0	0	+1	0	0

I coefficienti η_{hh} e i termini η_{ho} sono dati (salvo errori od omissioni) da:

$$\eta_{10} = \frac{P \sin \alpha \cos \alpha}{EA} l_1 - \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{GK} l_1 - \frac{Pl}{EJ} \cos \alpha \cdot \frac{l_1^2}{2} - \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{EJ} \frac{l_1^3}{3}$$

$$\eta_{20} = \frac{P \sin \alpha \cos \alpha}{EA} l_1 - \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{GK} l_1 - \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{EJ} \frac{l_1^3}{3}$$

$$\eta_{11} = \frac{2l}{GK} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{GK} l_1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{EA} l_1 + \frac{2l^3}{3EJ} + \frac{2l^2 l_1}{EJ} + \frac{4l \sin \alpha \cdot l_1^2}{2EJ} + \frac{2 \sin^2 \alpha}{3EJ} l_1^3 \quad (3.20)$$

$$\eta_{22} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{EA} l_1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{GK} l_1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{3EJ} l_1^3 + \frac{2l_1 \cos \alpha}{EA}$$

$$\eta_{12} = \eta_{21} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{EA} l_1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{GK} l_1 + \frac{2 \sin^2 \alpha}{3EJ} l_1^3 + \frac{\sin \alpha}{EJ} l l_1^2$$

Inserendo questi valori nelle (3.19) si ottengono X_1 e X_2 . Osserviamo che generalmente si ritengono trascurabili nelle (3.20) i termini connessi alla deformabilità a taglio. Ciò naturalmente non vuol dire che si possano trascurare gli effetti statici del taglio (per la determinazione della resistenza alle tensioni tangenziali). A questo punto il tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione procede in modo del tutto elementare ed ovvio. Si noti che essendo il sistema simmetrico caricato simmetricamente, il diagramma del momento è simmetrico (rispetto all'asse verticale \downarrow); quello del taglio è antisimmetrico e quello della forza normale è simmetrico.

Alberto Castigliano

Nato ad Asti nel 1847. Frequenta il politecnico di Torino dove si diploma nel 1873 discutendo una tesi nella quale è formulato e dimostrato il "teorema del lavoro minimo". Nel 1879 pubblica in lingua francese un saggio intitolato "Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications" (ed. Negro, Torino): in esso i risultati precedentemente conseguiti sono ripresi e sviluppati applicativamente con tale ricchezza di esempi che, secondo Timoshenko (Op. cit. p. 292), "it is easy to see that little has been added to this branch of the theory of structures since Castigliano wrote his famous book"

La nuova impostazione suscitò dapprima "vive e non sempre serene controversie, e ci volle l'opera di Müller-Breslau in Germania e di Cusida in Italia per stabilire in modo definitivo e indubbio il valore sia scientifico che pratico delle nuove vie che l'opera del Castigliano aveva aperte alla Scienza delle Costruzioni" (Cfr. la introduz. di G. Colonnetti alla raccolta di testi del Castigliano "Selecta", ed. R.L. Avalle 1935, Torino).

Castigliano ha formulato tre teoremi tra loro strettamente collegati; nel saggio del 1879 così li enuncia (Selecta, p. 95).

Teoremi delle derivate del lavoro di deformazione⁽¹⁾

Prima parte: Se si esprime il lavoro di deformazione di un corpo o sistema elastico in funzione degli spostamenti relativi dei punti di applicazione delle forze esterne, si ottiene una formula la cui derivata, rispetto a questi spostamenti, danno il valore delle forze corrispondenti.

Seconda parte: Se si esprime il lavoro di deformazione di un corpo o sistema elastico in funzione delle forze esterne, la derivata di questa espressione, rispetto a una di queste forze, dà lo spostamento relativo del suo punto di applicazione.

Teorema del lavoro minimo (ivi, p. 99)

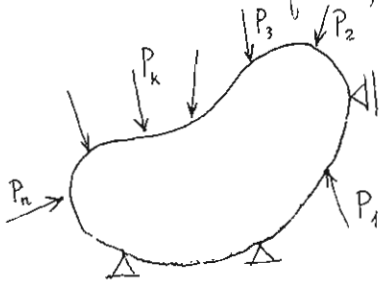
Le forze elastiche che operano su ogni particella di un corpo o di un sistema deformato, sono quelle che rendono minimo il lavoro di deformazione, con

(1) "Lavoro di deformazione" è la denominazione che Castigliano dà alla energia potenziale elastica Φ .

riguardo alle condizioni che esprimono l'equilibrio locale di tali forze.

Limitaremo l'attenzione alla dimostrazione del primo e del secondo enunciato; del resto, il terzo è un corollario del secondo. Giungeremo così ad una rigorosa giustificazione del "principio di elasticità" del Menabrea e potremo anzi capire il significato dei termini η_{h0} e dei coefficienti η_{hk} che compaiono nel sistema di equazioni (3.17).

Anzitutto va precisato che lo "spostamento relativo del punto di applicazione di una forza" di cui Castigliano parla deve essere inteso come proiezione, sulla direzione della forza, dello spostamento totale.



Consideriamo dunque un corpo elastico (in particolare una travatura elastica) caricato da un sistema qualunque di forze P_1, P_2, \dots, P_n , e vincolato in modo da non poter subire uno stato di spostamento "rigido".

Imprimiamo ora al corpo una variazione infinitesima dello stato di spostamento: si verificheranno di conseguenza incrementi infinitesimi $d\eta_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) degli spostamenti relativi dei punti di applicazione delle forze P_1, P_2, \dots, P_n . Esprimendo l'energia potenziale elastica in funzione degli spostamenti η_k relativi alle P_k , il suo incremento infinitesimo può scriversi:

$$d\Phi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_k} d\eta_k \quad (3.21)$$

D'altra parte, l'incremento del lavoro "esterno" compiuto dalle P_k per i $d\eta_k$ è ovviamente:

$$dL = \sum_{k=1}^n P_k d\eta_k \quad (3.22)$$

Il teorema di Biot assicura che:

$$dL = d\Phi, \quad \text{ossia che:} \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_k} d\eta_k = \sum_{k=1}^n P_k d\eta_k; \quad (3.23)$$

quindi, per l'arbitrarietà di $d\eta_k$ segue la formula:

$$P_k = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta_k} \quad (3.24)$$

Resta con ciò dimostrato il primo enunciato.

Passiamo ora al secondo. Si siano alle forze esterne incrementi infinitesimi arbitrari dP_k ($k=1, 2, \dots, n$). L'energia potenziale elastica scritta in forma complementare, cioè in funzione delle forze P_k subisce allora l'incremento:

$$d\Phi = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} dP_k \quad (3.25)$$

D'altra parte, l'incremento del lavoro esterno compiuto dai dP_k è:

$$dL = \sum_{k=1}^n dP_k \cdot \eta_k \quad (3.26)$$

essendo η_k ($k=1, 2, \dots, n$) gli spostamenti dovuti alle forze P_k . Pertanto il teorema di Clapeyron assicura che:

$$dL = d\Phi \quad \text{ossia che:} \quad \sum_{k=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} dP_k = \sum_{k=1}^n \eta_k dP_k, \quad (3.27)$$

quindi, per l'arbitrarietà di dP_k , segue la formula:

$$\boxed{\eta_k = \frac{\partial \Phi}{\partial P_k}} \quad (3.28)$$

In conclusione: derivando l'energia potenziale elastica (complementare) rispetto a una delle forze esterne (restando costanti le rimanenti), si trova la proiezione dello spostamento del punto di applicazione di questa forza nella sua direzione e nel suo verso.

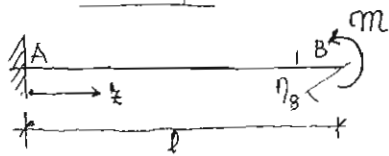
Esaminando il procedimento dimostrativo che ci ha condotto alla (3.28), si vede facilmente che la forza P_k può essere considerata una forza generalizzata, cioè, in generale, un certo "fattore di forza". Di conseguenza la quantità η_k dovrà essere considerata come spostamento generalizzato, cioè come un parametro geometrico sul quale la P_k effettua il suo lavoro. Così, se P_k è un momento esterno M , η rappresenta la rotazione del suo punto di applicazione nella sua direzione e verso; se un corpo è caricato con forze idrostatiche, facendo la derivata dell'energia rispetto alla pressione, si ottiene la variazione di volume del corpo.

Come si è detto, nella memoria del 1879, Castigliano sviluppò numerosi e importanti applicazioni della formula (3.28), con riguardo alle travi ad asse rettilineo, alle travi curve, ai sistemi composti. Al fine di richiamare alcuni degli esempi risolti dall'Autore, vediamo in che modo la (3.28) si presta 1) alla determinazione degli spostamenti in una travatura isostatica e 2) alla determinazione delle iperstatiche in un sistema staticamente indeterminato.

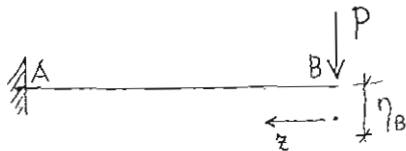
1) Applicazione della (3.28) alla determinazione di spostamenti

La (3.28) può essere immediatamente utilizzata quando si richiede lo spostamento del punto di applicazione di una forza esterna assegnata, agente sulla struttura, ed anzi, più precisamente, si richiede la componente di tale spostamento secondo la forza stessa. In questo caso basta esprimere l'energia potenziale elastica del sistema ed effettuare la derivazione indicata.

Esempi:



$$\Phi = \int_0^l \frac{m^2}{2EJ} dz = \frac{m^2 l}{2EJ}, \quad \text{da cui: } \eta_B = \frac{\partial \Phi}{\partial m} = \frac{ml}{EJ}$$



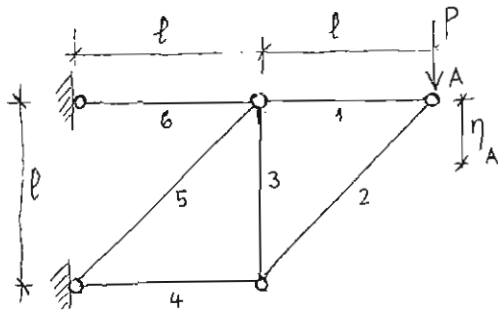
Le sollecitazioni sono: $T = P$, $M = -Pz$

Quindi:
$$\Phi = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{T^2}{GK} + \frac{M^2}{EJ} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{P^2}{GK} + \frac{P^2 z^2}{EJ} \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{P^2 l}{GK} + \frac{P^2 l^3}{3EJ} \right)$$

da cui:

$$\eta_B = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = \frac{Pl}{GK} + \frac{Pl^3}{3EJ}$$



(E, A cost. dappertutto)

La forza normale nelle diverse aste è riportata nella tabella, dove sono indicati anche le lunghezze delle aste:

aste	$N^{(i)}$	$l^{(i)}$	aste	$N^{(i)}$	$l^{(i)}$
1	P	l	4	-P	l
2	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$
3	P	l	6	2P	l

L'energia potenziale elastica complessiva è data da:

$$\Phi = \sum_{i=1}^6 \frac{N^{(i)2} l^{(i)}}{EA^{(i)}} \quad (3.29)$$

e quindi da:

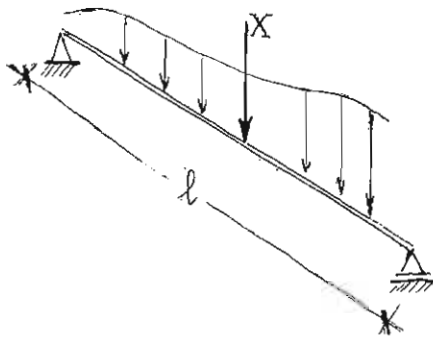
$$\Phi = \frac{P^2 l}{2EA} (7 + 4\sqrt{2})$$

Allora lo spostamento verticale di A è determinato dalla:

$$\eta_A = \frac{\partial \Phi}{\partial P} = \frac{Pl}{EA} (7 + 4\sqrt{2})$$

Diverso è il caso in cui si chieda lo spostamento in un punto generico della struttura, ad es. dove non agisce direttamente alcuna forza esterna.

Castigliano suggerisce allora (p. 119 di "Selecta") il seguente procedimento:



si aggiunga una forza X nel punto in cui si vuol conoscere lo spostamento e nella sua direzione. La sollecitazione $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}$ per questo nuovo sistema di forze costituito dal carico effettivo più la forza X , è offerta naturalmente dalle espressioni (soprapp. degli effetti):

$$\bar{N} = N + N_1 X \quad \bar{T} = T + T_1 X \quad \bar{M} = M + M_1 X \quad (3.30)$$

dove, al solito, N, T, M rappresentano le sollecitazioni dovute al carico esterno effettivo e N_1, T_1, M_1 le sollecitazioni dovute a una forza $X = 1$. L'energia potenziale elastica connessa a $\bar{N}, \bar{T}, \bar{M}$ è:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{(N + N_1 X)^2}{EA} + \frac{(T + T_1 X)^2}{GK} + \frac{(M + M_1 X)^2}{EJ} \right] dz \quad (3.31)$$

Effettuando la derivazione rispetto a X si ottiene lo spostamento del punto di applicazione di X , nella direzione (e nel verso) di X dovuto al sistema di forze complessivo, ossia al carico esterno e alla forza X :

$$\bar{\eta}_{(\text{dovuto a } q \text{ e a } X)} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial X} = \int_0^l \left(\frac{N + N_1 X}{EA} N_1 + \frac{T + T_1 X}{GK} T_1 + \frac{M + M_1 X}{EJ} M_1 \right) dz \quad (3.32)$$

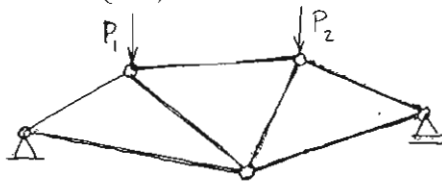
Questa formula, dice Castigliano, deve valere per qualunque valore di X e quindi anche per $X = 0$: in questo caso essa esprime lo spostamento η dovuto al solo carico esterno, e cioè proprio quel che si voleva determinare.

In conclusione:

$$\boxed{\eta = \int_0^l \left(\frac{NN_1}{EA} + \frac{TT_1}{GK} + \frac{MM_1}{EJ} \right) dz} \quad (3.33)$$

L'espressione che abbiamo così ottenuta è fondamentale per l'analisi degli spostamenti nelle travi isostatiche. Come vedremo, Maxwell (in Phil. Mag. 27, p. 294 (1864)) e Mohr (in Z. Architek. und Ing. Ver. Hannover (1874), (1875)) avevano dedotto per altra via una formula che rappresenta l'applicazione

della (3.33) alle travi reticolari. Dette $N^{(k)}$, $N_1^{(k)}$ le forze normali nell'asta k -esima ($k=1, 2, \dots, n$) di lunghezza $l^{(k)}$ e sezione $A^{(k)}$, dovute rispettivamente al carico esterno e a una forza unitaria disposta nel punto in cui si vuol calcolare lo spostamento η e nella sua direzione, la (3.33) diventa:

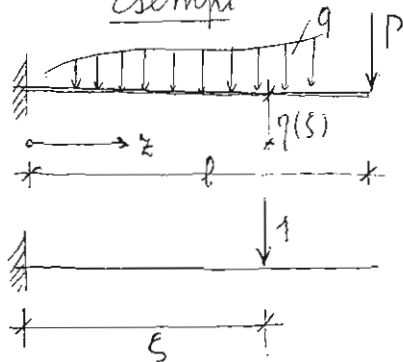


$$\eta = \sum_{k=1}^n \frac{N^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}} \rho^{(k)} \quad (3.34)$$

Per questo, spesso nella letteratura tecnica si denomina la (3.33) "integrale di Maxwell-Mohr".

Esempi

[1]



Il primo esempio considerato da Castigliano è quello della mensola soggetta a carico trasversale qualunque: per determinare lo spostamento η all'ascissa ξ occorre determinare sia la sollecitazione T, M dovuta al carico esterno, sia la sollecitazione T_1, M_1 dovuta a una forza unitaria posta in ξ .

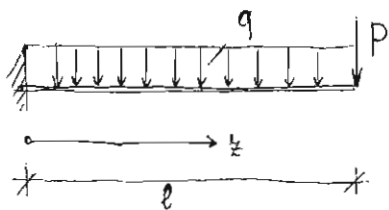
Risulta:

$$T_1 = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < z < \xi \\ 0 & \text{per } \xi \leq z \leq l \end{cases} \quad M_1 = \begin{cases} -(\xi - z) & \text{per } 0 < z < \xi \\ 0 & \text{per } \xi \leq z \leq l \end{cases}$$

la formula che dà lo spostamento η è dunque:

$$\eta(\xi) = \int_0^{\xi} \frac{T(z)}{GK} dz + \int_0^{\xi} \frac{M(z)}{EJ} (z - \xi) dz \quad (3.35)$$

Esaminiamo il caso particolare in cui la trave è caricata da un peso P



all'estremità e da un carico ripartito uniforme q .

Si ha:

$$T(z) = P + q(l - z)$$

$$M(z) = -P(l - z) - \frac{1}{2} q(l - z)^2$$

Pertanto:

$$\eta(\xi) = P \int_0^{\xi} \frac{l - z}{EJ} (\xi - z) dz + \frac{q}{2} \int_0^{\xi} \frac{(l - z)^2}{EJ} (\xi - z) dz + P \int_0^{\xi} \frac{dz}{GK} + q \int_0^{\xi} \frac{l - z}{GK} dz$$

Se le rigidorezze a flessione EJ e a taglio GK sono costanti, l'integrazione fornisce:

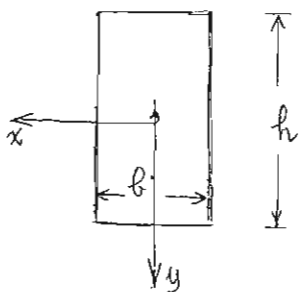
$$\eta(\xi) = \frac{\xi^2}{EJ} \left[P \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{6} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^2}{12} \right) \right] + \frac{\xi}{GK} \left[P + q \left(l - \frac{\xi}{2} \right) \right] \quad (3.36)$$

Per ottenere la freccia all'estremità della trave basta porre, in questa formula, $\xi = l$; ciò dà luogo alla:

$$f = \eta(l) = \frac{l^2}{EJ} \left(\frac{P}{3} + \frac{ql}{8} \right) + \frac{l}{GK} \left(P + \frac{ql}{2} \right) \quad (3.37)$$

Castigliano utilizza appunto questa formula per svolgere su un caso particolare ma assai istruttivo, una discussione intorno all'incidenza del tutto secondaria che ha la deformabilità a taglio rispetto a quella connessa alla flessione.

Supponiamo infatti che la sezione della trave sia rettangolare, di lati b e h con $h > b$ (cfr. fig.); è allora:



$$A = b \cdot h \quad J = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Ricordando quel che si è detto a pag. , a proposito di K , per la sezione rettangolare si ha:

$$K = \frac{5}{6} A$$

Posto $\nu = 0,25$ (questo è il valore considerato da Castigliano), risulta:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2}{5} E$$

Di conseguenza la formula () diventa:

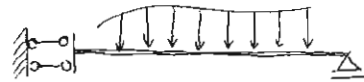
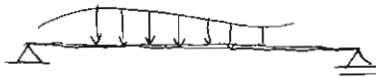
$$f = \frac{12l^3}{Ebh^3} \left(\frac{P}{3} + \frac{ql}{8} \right) + \frac{3l}{Ebh} \left(P + \frac{ql}{2} \right)$$

ovvero:

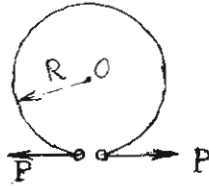
$$f = \frac{12l^3}{Ebh^3} \left[\left(\frac{P}{3} + \frac{ql}{8} \right) + \left(\frac{P}{4} + \frac{ql}{8} \right) \frac{h^2}{l^2} \right] \quad (3.38)$$

di qui si vede che il secondo termine entro parentesi, cioè il termine che proviene dalla deformazione a taglio, è trascurabile rispetto al primo che proviene dalla flessione, se le dimensioni trasversali della trave sono piccole rispetto alla lunghezza, poiché in tal caso il rapporto $\frac{h^2}{l^2}$ è molto piccolo. Se ad esempio è $h < \frac{l}{10}$, come frequentemente si verifica, il contributo del taglio nella formula (3.38) è inferiore all'1% del contributo flessionale.

Lasciamo allo studente sviluppare altri esempi, corrispondenti ad altre condizioni di vincolo della trave, per i quali il procedimento è del tutto analogo a quello ora tracciato.

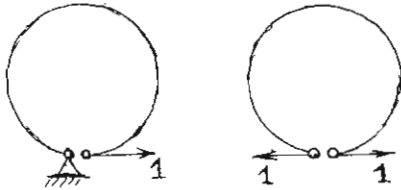


- [2] Studiamo invece il seguente caso (vedi fig.) in cui si chiede di determinare lo spostamento relativo tra le due facce della sconnessione in A dovuto alle forze P.



La rigidezza dell'anello è costante e pari a EJ .
Nel generico punto B il momento flettente è:

$$M = PR(1 - \cos \varphi)$$



Supponendo che l'estremità sinistra dell'anello sia fissa, per determinare M_1 si deve applicare all'estremità destra una forza unitaria. Ora però si

verifica che la reazione dell'appoggio è ancora una forza unitaria uguale ed opposta alla precedente. Ne segue che la situazione descritta dalla figura (α) è del tutto equivalente alla situazione descritta dalla figura (β)

Ciò vuol dire che per determinare uno spostamento relativo tra due facce di una sconnessione, o anche tra due punti generici di una struttura, occorre applicare in tali due punti forze uguali ed opposte, agenti secondo la direzione in cui si vuol valutare lo spostamento relativo. Questa regola vale sempre.

Tornando al nostro esempio, il momento M_1 è:

$$M_1 = R(1 - \cos \varphi)$$

Lo spostamento relativo cercato è dunque dato da:

$$\eta = \int_{-P} \frac{MM_1}{EJ} dl$$

dove l è la lunghezza dell'anello: $l = 2\pi R$ e $dl = R d\varphi$

Effettuando l'integrazione si ottiene:

$$\eta = \frac{PR^3}{EJ} \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = 3\pi \frac{PR^3}{EJ}$$

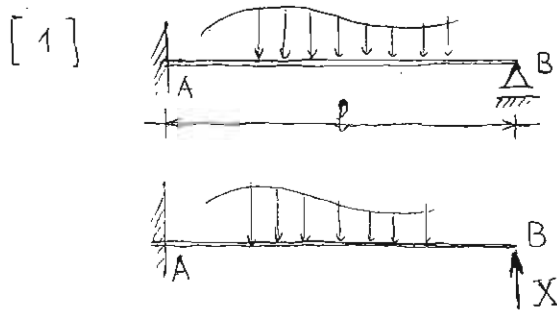
2) Applicazione della (3.28) per la soluzione dei sistemi iperstatici.

Ora dobbiamo illustrare in che modo la relazione fondamentale:

$$\eta_k = \frac{\partial \Phi}{\partial P_k} \quad (3.28)$$

possa essere utilizzata per la risoluzione di strutture iperstatiche.

Seguendo, ancora una volta, il saggio già citato del Castigliano (1879) studiamo gli stessi esempi ivi considerati.



Il primo di essi riguarda una trave incastrata-appoggiata, cioè una volta iperstatica. Sostituito l'appoggio B con la corrispondente reazione X_1 , il momento e il taglio in ogni sezione sono offerti dalle equazioni:

$$M = M_0 + M_1 X_1 \quad T = T_0 + T_1 X_1$$

dove M_0, T_0 sono dovuti al solo carico esterno operante sul sistema principale e M_1, T_1 sono dovuti ad una forza unitaria posta nel punto di applicazione, nella direzione e nel verso di X_1 . Dalla (3.28) segue allora che lo spostamento η_1 del punto B è, in generale, dato dalla:

$$\eta_1 = \int_0^l \left(\frac{M_0 + M_1 X_1}{EJ} M_1 + \frac{T_0 + T_1 X_1}{GK} T_1 \right) dz$$

ovvero, dalla:

$$\eta_1 = \int_0^l \left(\frac{M_0 M_1}{EJ} + \frac{T_0 T_1}{GK} \right) dz + X_1 \int_0^l \left(\frac{M_1^2}{EJ} + \frac{T_1^2}{GK} \right) dz \quad (3.39)$$

Introduciamo le notazioni già utilizzate a pag. . La (3.39) diventa:

$$\boxed{\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1} \quad (3.40)$$

Ora, il valore di η_1 è noto: sappiamo infatti che nel sistema effettivo lo spostamento verticale di B è nullo, e quindi nel sistema equivalente in cui l'appoggio B è sostituito con la reazione iperstatica X_1 , la stessa X_1 deve essere scelta in modo da render nullo η_1 . La (3.40) si traduce quindi nella:

$$0 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$$

da cui si ottiene:

$$X_1 = - \frac{\eta_{10}}{\eta_{11}}$$

Questa formula è stata già ottenuta quando si è illustrato l'applicazione del "principio" di Menabrea. Ora però siamo in grado di comprendere il significato dei termini η_{10} , η_{11} . Poniamo nella (3.40) $X_1 = 0$. Ne segue:

$$\eta_1 = \eta_{10}$$

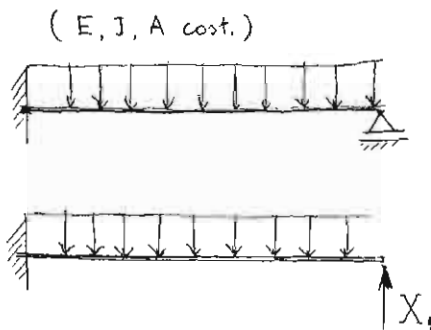
cioè η_{10} rappresenta lo spostamento nel sistema principale del punto di applicazione di X_1 , valutato nella direzione e nel verso di X_1 , dovuto al solo carico esterno. Poniamo ora invece nella (3.40) nullo il termine del carico esterno e unitario il valore di X_1 . Ne segue:

$$\eta_1 = \eta_{11}$$

cioè η_{11} rappresenta lo spostamento nel sistema principale del punto di applicazione di X_1 , valutato nella direzione e nel verso di X_1 , dovuto ad una forza unitaria disposta come X_1 .

Si vede allora che l'equazione (3.40) è un'equazione di congruenza: essa ci dice che lo spostamento effettivo η_1 del punto di applicazione dell'iperstatica (spostamento che nel caso considerato è nullo) è prodotto nel sistema principale da un duplice contributo: quello dovuto al carico esterno, cioè η_{10} , e quello dovuto all'iperstatica, cioè $\eta_{11} X_1$.

Se, per esempio, la trave è soggetta a un carico uniformemente



distribuito q , si ha per la (3.37) di pag. , fatto $P = 0$:

$$\eta_{10} = - \frac{q l^4}{8 E J} - \frac{q l^2}{2 G K}$$

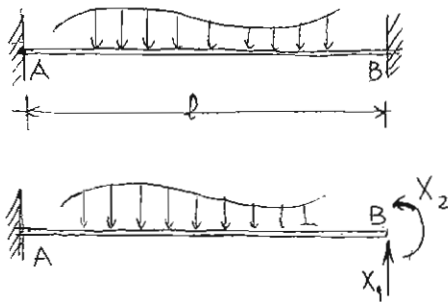
e, per la stessa (3.37), fatti $q = 0$ e $P = 1$:

$$\eta_{11} = \frac{l^3}{3 E J} + \frac{l}{G K}$$

Trascurando l'effetto deformativo del taglio si deduce pertanto:

$$X_1 = \frac{3}{8} q l$$

[2] Il secondo esempio studiato da Castigliano è quello della trave incastata agli estremi. Essendo presenti soltanto carichi trasversali rispetto alla linea d'assi



rettilinea, il problema è due volte iperstatico: il procedimento per risolverlo è del tutto simile a quello già svolto nel caso [1]

Riferiamoci al sistema principale rappresentato in figura. La sollecitazione può essere espressa dalle:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 \\ T &= T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

dove M_0, T_0 hanno il solito significato, M_1, T_1 sono il momento e il taglio dovuti a una forza $X_1 = 1$ e M_2, T_2 sono il momento e il taglio dovuti a una forza $X_2 = 1$. Indicando con η_1 lo spostamento del punto di applicazione di X_1 , nella direzione e nel verso di X_1 (e cioè lo spostamento verticale di B), e con η_2 lo spostamento del punto di applicazione di X_2 nella direzione e nel verso di X_2 (e cioè la rotazione di B), dal teorema di Castigliano si trae:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} = \int_0^l \left(\frac{M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2}{EJ} M_1 + \frac{T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2}{GK} T_1 \right) dz \\ \eta_2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} = \int_0^l \left(\frac{M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2}{EJ} M_2 + \frac{T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2}{GK} T_2 \right) dz \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ora, i valori di η_1 e di η_2 sono noti: sappiamo infatti che, se in B l'incastro è "perfetto", dovranno essere nulli lo spostamento verticale η_1 e la rotazione η_2 . Dunque:

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_2 = 0 \quad (3.43)$$

Ne segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial X_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial X_2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Queste sono le equazioni determinatrici delle iperstatiche X_1, X_2 . Esse consentono di affermare che, in corrispondenza della soluzione, l'energia potenziale elastica Φ è estrema (ed, anzi, da un esame delle derivate seconde si può ulteriormente precisare che essa è minima). Resta così verificato

nel caso qui in esame il "principio" di Menabrea.

Rendendo esplicite le derivate parziali di Φ si ottiene:

$$\begin{aligned}\eta_1 = 0 &= \eta_{10} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 \\ \eta_2 = 0 &= \eta_{20} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2\end{aligned}\quad (3.45)$$

dove al solito:

$$\begin{aligned}\eta_{10} &= \int_0^l \left(\frac{M_0 M_1}{EJ} + \frac{T_0 T_1}{GK} \right) dz & \eta_{11} &= \int_0^l \left(\frac{M_1^2}{EJ} + \frac{T_1^2}{GK} \right) dz & \eta_{12} &= \int_0^l \left(\frac{M_1 M_2}{EJ} + \frac{T_1 T_2}{GK} \right) dz \\ \eta_{20} &= \int_0^l \left(\frac{M_0 M_2}{EJ} + \frac{T_0 T_2}{GK} \right) dz & \eta_{21} &= \int_0^l \left(\frac{M_2 M_1}{EJ} + \frac{T_2 T_1}{GK} \right) dz & \eta_{22} &= \int_0^l \left(\frac{M_2^2}{EJ} + \frac{T_2^2}{GK} \right) dz\end{aligned}\quad (3.46)$$

Il significato fisico dei diversi termini è facilmente dedotto da considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esempio precedente. Sofferamoci solo un momento sui coefficienti η_{12} ed η_{21} (uguali fra loro).

Posto nullo nella:

$$\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2$$

il contributo del carico esterno e della reazione iperstatica X_1 , e pari ad 1 il valore di X_2 , segue:

$$\eta_1 = \eta_{12}$$

cioè η_{12} rappresenta lo spostamento del punto di applicazione di X_1 nella direzione e nel verso di X_1 (nel sistema principale) dovuto a una forza $X_2 = 1$.

Posto invece nella:

$$\eta_2 = \eta_{20} + \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2$$

nullo il contributo del carico esterno, nulla l'iperstatica X_2 e pari all'unità l'iperstatica X_1 , segue:

$$\eta_2 = \eta_{21}$$

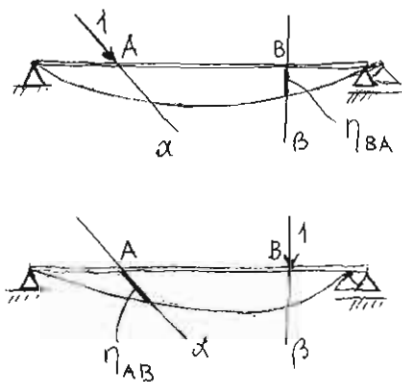
cioè η_{21} rappresenta lo spostamento del punto di applicazione di X_2 nella direzione e nel verso di X_2 (nel sistema principale) dovuto a una forza $X_1 = 1$.

Allora l'uguaglianza:

$$\eta_{12} = \eta_{21}\quad (3.47)$$

ha un'interessante interpretazione meccanica posta in rilievo da Maxwell sin dal 1864 (On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames, Phil. Mag. 27, p. 294), con riferimento ad un generico corpo elastico soggetto una volta ad una forza unitaria X_A agente in un punto A e una seconda volta ad una forza unitaria X_B agente in un punto B. Vale il seguente

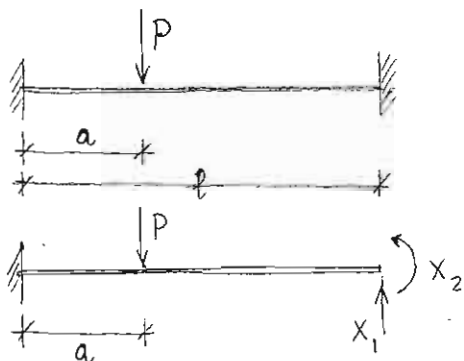
teorema : In un corpo elastico qualsiasi con vincoli perfetti, lo spostamento di un punto A valutato in una direzione α , dovuto a una forza unitaria agente in un punto B secondo una direzione β , è uguale allo spostamento del punto B valutato nella direzione β dovuto a una forza unitaria agente in un punto A secondo la direzione α .



In formula :

$$\eta_{AB} = \eta_{BA} \quad (3.48)$$

Esaminiamo alcuni casi particolari (vedi "Selecta" di Castigliano, p. 126-127)



Si ha :

$$M_0(z) = \begin{cases} -P(a-z) & \text{per } 0 \leq z < a \\ 0 & \text{per } a \leq z \leq l \end{cases}$$

$$T_0(z) = \begin{cases} P & \text{per } 0 \leq z < a \\ 0 & \text{per } a \leq z \leq l \end{cases}$$

$$(N_0(z) = 0)$$

Inoltre :

$$M_1(z) = l - z$$

$$M_2(z) = 1$$

$$T_1(z) = -1$$

$$T_2(z) = 0$$

$$(N_1(z) = 0)$$

$$(N_2(z) = 0)$$

(3.49)

È quindi :

$$\eta_{10} = -P \left[\frac{a^2(3l-a)}{6EJ} + \frac{a}{GK} \right]$$

$$\eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{GK} \quad \eta_{22} = \frac{l}{EJ}$$

$$\eta_{12} = \eta_{21} = \frac{l^2}{2EJ}$$

Dalle equazioni (3.45) si ottiene.

$$X_1 = P \left[\frac{a^2(3l-2a)}{12EJ} + \frac{a}{GK} \right] \left(\frac{l^3}{12EJ} + \frac{l}{GK} \right)^{-1} \quad (3.50)$$

$$X_2 = -\frac{P}{l} \left[\frac{a^2l(l-a)}{6EJ} + \frac{a(l-a)}{GK} \right] \left(\frac{l^2}{6EJ} + \frac{2}{GK} \right)^{-1} \quad (3.51)$$

Tali valori delle incognite si possono introdurre nell'equazione (3.35) per definire la linea elastica. Eseguendo le integrazioni si deduce, ad es. per $a < \xi \leq l$:

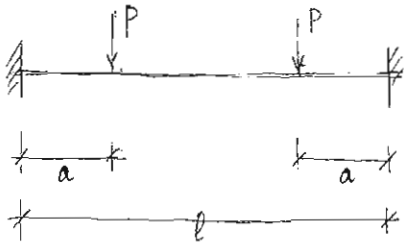
$$\eta(\xi) = -X_2 \frac{\xi^2}{2EJ} - X_1 \left[\frac{\xi^2(3l-\xi)}{6EJ} + \frac{\xi}{GK} \right] + P \left[\frac{a^2(3\xi-a)}{6EJ} + \frac{a}{GK} \right]$$

Se si ha $a < \frac{l}{2}$ questa equazione può fornire il valore della freccia in mezzecchia:

$$f = \eta\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{X_2 l^2}{8EJ} - X_1 \left(\frac{5l^3}{48EJ} + \frac{l}{GK} \right) + P \left(\frac{a^2(3l-2a)}{12EJ} + \frac{a}{GK} \right) \quad (3.52)$$

Trascuriamo l'effetto deformativo del taglio; le espressioni (3.50) (3.51) (3.52) diventano allora:

$$X_1 = P \frac{a^2(3l-2a)}{l^3} \quad X_2 = -P \frac{a^2(l-a)}{l^2} \quad f = P \frac{a^2(3l-4a)}{48EJ}$$



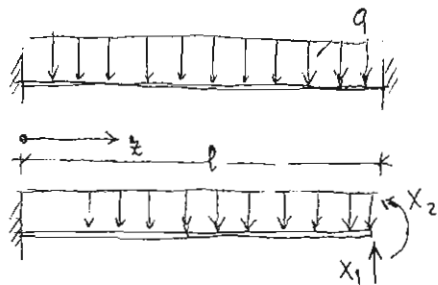
Se la trave è soggetta a due forze concentrate, l'una a distanza a dall'incastro di sinistra, l'altra a distanza a dall'incastro di destra, si può utilizzare la soluzione svolta sopra, applicando la

sovrapposizione degli effetti. Si ha allora:

$$X_1 = P \frac{a^2(3l-2a)}{l^3} + P \frac{(l-a)^2(3l-2l+2a)}{l^3} = P$$

$$X_2 = -P \frac{a^2(l-a)}{l^2} - \frac{P(l-a)^2 a}{l^2} = -P \frac{a(l-a)}{l}$$

$$f = 2P \frac{a^2(3l-4a)}{48EJ}$$



In caso di carico uniformemente ripartito

si ha:

$$M_0 = -\frac{1}{2} q(l-z)^2$$

$$T_0 = q(l-z)$$

mentre per M_1, T_1 valgono ancora le (3.49). Ne segue:

$$\eta_{10} = -q \left(\frac{l^4}{8EJ} + \frac{l^2}{2GK} \right)$$

$$\eta_{20} = -\frac{q l^3}{6EJ}$$

Le equazioni di congruenza

$$0 = \eta_k = \eta_{k0} + \sum_{k=1}^n \eta_{kk} X_k$$

diventano:

$$\left(\frac{l^3}{3EJ} + \frac{l}{GK}\right) X_1 + \frac{l^2}{2EJ} X_2 = q \left(\frac{l^4}{8EJ} + \frac{l^2}{2GK}\right)$$

$$\frac{l^2}{2EJ} X_1 + \frac{l}{EJ} X_2 = q \frac{l^3}{6EJ}$$

da cui:

$$X_1 = q \left(\frac{l^4}{24EJ} + \frac{l^2}{2GK}\right) / \left(\frac{l^3}{12EJ} + \frac{l}{GK}\right) \quad X_2 = -q \left(\frac{l^4}{72EJ} + \frac{l^2}{6GK}\right) / \left(\frac{l^2}{6EJ} + \frac{l}{GK}\right)$$

ovvero:

$$X_1 = \frac{1}{2} q l \quad X_2 = -\frac{1}{12} q l^2$$

la curva elastica \bar{z} ottenuta dalla (3.35) e si esprime nella:

$$\eta(\xi) = -X_2 \frac{\xi^2}{2EJ} - X_1 \left[\frac{\xi^2(3l-\xi)}{6EJ} + \frac{\xi}{GK} \right] + q \left[\frac{\xi^2(6l^2 - 4l\xi + \xi^2)}{24EJ} + \frac{\xi(2l-\xi)}{2GK} \right]$$

cioè:

$$\eta(\xi) = q \frac{l^2 \xi^2 - 2l \xi^3 + \xi^4}{24EJ} + q \frac{\xi(l-\xi)}{2GK}$$

la freccia in mezzaria, trascurando l'effetto deformativo del taglio, è:

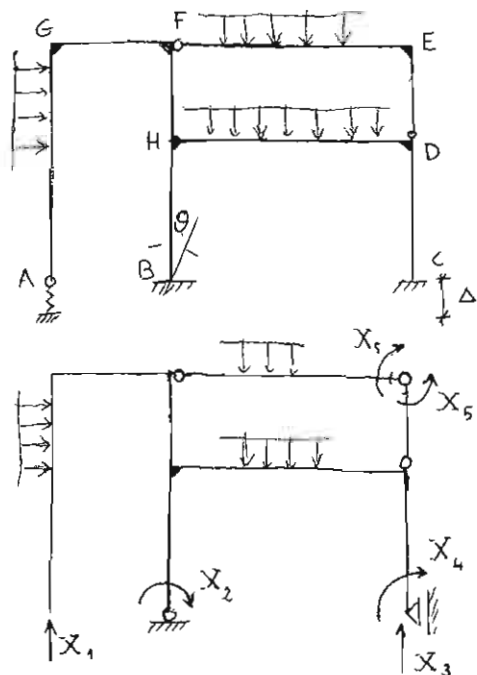
$$f = \frac{q l^4}{384EJ}$$

[3] Infine, consideriamo il caso più generale di un sistema n volte iperstatico, soggetto all'azione dei carichi esterni

e alla sollecitazione indotta da eventuali cedimenti (assegnati) dei vincoli.

Per fissare le idee supponiamo che in A l'appoggio sia cedevole elasticamente (con "flessibilità" F_1), che in B sia presente un cedimento angolare noto θ , e in C un cedimento verticale noto Δ .

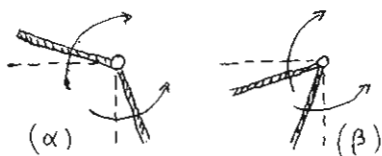
Assunto il sistema equivalente rappresentato in figura, si può affermare che gli spostamenti $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5$ dei punti di



applicazioni delle diverse iperstatiche X_1, X_2, \dots, X_5 (valutati nella direzione e nel verso delle iperstatiche stesse) debbono soddisfare le seguenti condizioni:

$$\eta_1 = -F_1 X_1 \quad \eta_2 = \theta \quad \eta_3 = -\Delta \quad \eta_4 = 0 \quad \eta_5 = 0 \quad (3.53)$$

Nota: la prima di queste condizioni riflette la definizione di cedimento elastico; infatti in A il cedimento verticale è proporzionale secondo la costante F_1 alla reazione in A, cioè a X_1 ; il segno meno deriva dal fatto che, se la reazione X_1 ha il verso segnato in figura, il cedimento di A è di verso opposto. La seconda, la terza e la quarta non abbisognano di spiegazione. Per la quinta condizione (e cioè per $\eta_5 = 0$) è invece opportuno ricordare che η_5 rappresenta lo spostamento relativo tra le due facce della sconnessione effettuata, valutato naturalmente nella direzione e nel verso della iperstatica X_5 . Più esplici-



citamente, η_5 sarebbe > 0 se la rotazione mutua tra le due facce della cerniera rispondesse alla figura (α) e < 0 se rispondesse alla figura (β).

Questa interpretazione per η_i vale ogniquisvolta η_i si riferisca al punto di applicazione di una sollecitazione iperstatica interna.

A questo punto si deve ricordare la relazione fondamentale di Castigliano (3.28). L'energia potenziale totale per l'intero sistema

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{T^2}{GK} + \frac{M^2}{EJ} \right) ds$$

(dove S indica che l'integrale va esteso a tutta la struttura e s è l'ascissa che la percorre) può esprimersi in funzione delle iperstatiche, essendo:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + \dots + M_n X_n \\ T &= T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + \dots + T_n X_n \\ N &= N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + \dots + N_n X_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

(nell'esempio qui considerato è $n=5$). Si avrà dunque:

$$\Phi = \Phi(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{2} \int_S \left(\frac{(N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k)^2}{EA} + \frac{(T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k)^2}{GK} + \frac{(M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k)^2}{EJ} \right) ds$$

La formola:

$$\eta_h = \frac{\partial \Phi}{\partial X_h}$$

dà luogo pertanto alle equazioni:

$$\eta_h = \int_S \left(\frac{N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k}{EA} N_h + \frac{T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k}{GK} T_h + \frac{M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k}{EJ} M_h \right) ds \quad (3.54)$$

le quali possono essere scritte sinteticamente così:

$$\eta_h = \eta_{h0} + \sum_{k=1}^n \eta_{hk} X_k \quad (h=1, 2, \dots, n) \quad (3.55)$$

dove al solito:

$$\eta_{h0} = \int_S \left(\frac{N_0 N_h}{EA} + \frac{T_0 T_h}{GK} + \frac{M_0 M_h}{EJ} \right) ds; \quad \eta_{hk} = \int_S \left(\frac{N_h N_k}{EA} + \frac{T_h T_k}{GK} + \frac{M_h M_k}{EJ} \right) ds \quad (3.18)$$

Le (3.55) costituiscono un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite X_1, X_2, \dots, X_n . Poiché il primo Autore che le introdusse sistematicamente per la soluzione generale delle strutture iperstatiche fu H. MÜLLER-BRESLAU (Die graphische Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1908) esse sono spesso denominate "equazioni di Müller-Breslau", benché fossero già implicitamente note e utilizzate precedentemente.

Si noti che la matrice dei coefficienti (detti coefficienti di influenza)

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \dots & \eta_{1n} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \dots & \eta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \dots & \eta_{nn} \end{vmatrix}$$

è simmetrica, essendo $\eta_{hk} = \eta_{kh}$. Il termine η_{h0} figura come termine noto; il termine η_h figura come noto se rappresenta uno spostamento assegnato (eventualmente nullo); se invece η_h designa uno spostamento elastico, è nella forma $-F_h X_h$ e deve essere associato al termine $\eta_{hh} X_h$. Nell'esempio considerato le equazioni sono in definitiva:

$$\begin{aligned} (\eta_{11} + F_1) X_1 + \eta_{12} X_2 + \eta_{13} X_3 + \eta_{14} X_4 + \eta_{15} X_5 &= 0 \\ \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \eta_{23} X_3 + \eta_{24} X_4 + \eta_{25} X_5 &= 0 \\ \eta_{31} X_1 + \eta_{32} X_2 + \eta_{33} X_3 + \eta_{34} X_4 + \eta_{35} X_5 &= -\Delta \\ \eta_{41} X_1 + \eta_{42} X_2 + \eta_{43} X_3 + \eta_{44} X_4 + \eta_{45} X_5 &= 0 \\ \eta_{51} X_1 + \eta_{52} X_2 + \eta_{53} X_3 + \eta_{54} X_4 + \eta_{55} X_5 &= 0 \end{aligned}$$

Un'ultima osservazione: nel caso di vincoli perfetti o cedevoli elasticamente le equazioni (3.55) ottengono l'interpretazione:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X_h} = 0 \quad (h=1, 2, \dots, n)$$

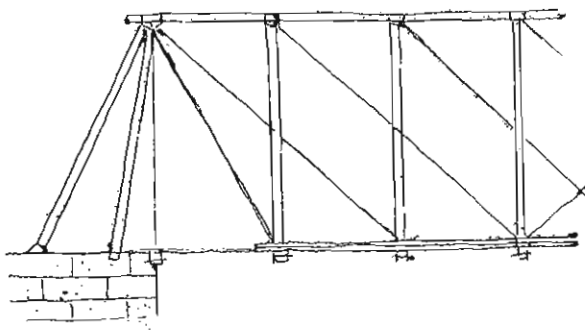
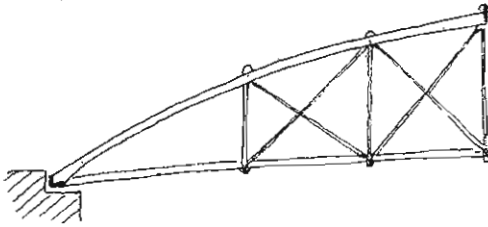
confermando, in generale, il "principio di elasticità" del Menabrea: l'energia

potenziale elastica è estrema (anzi minima) in corrispondenza della soluzione.

7.4. LE TRAVATURE RETICOLARI

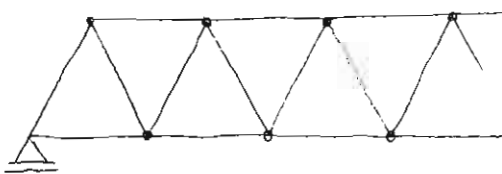
Le prime realizzazioni e le trattazioni elementari

Nel Capitolo IV abbiamo presentato alcuni esempi significativi di strutture reticolari per ponti e coperture. Come è noto, durante periodo della rivoluzione industriale, lo sviluppo delle costruzioni metalliche favorì grandemente l'impiego di schemi strutturali che ricalcavano quelli già realizzati o proposti in legno (si ricordino ad esempio i progetti del Palladio o le incavallature di Howe) ed erano riconducibili ad una idealizzazione reticolare.



I primi ponti reticolari metallici sorsero negli Stati Uniti intorno al 1840. Si deve menzionare la figura eminente di S. WHIPPLE progettista di numerosi ponti e di un trattato sulla costruzione dei ponti (An Essay on Bridge Building, Utica, N.Y. 1847) dove viene sottolineata l'esigenza di tener conto dell'effetto dei carichi mobili considerandone la posizione più sfavorevole ai fini della resistenza, e dove sono suggeriti metodi analitici e grafici per la determinazione degli sforzi in travature staticamente determinate.

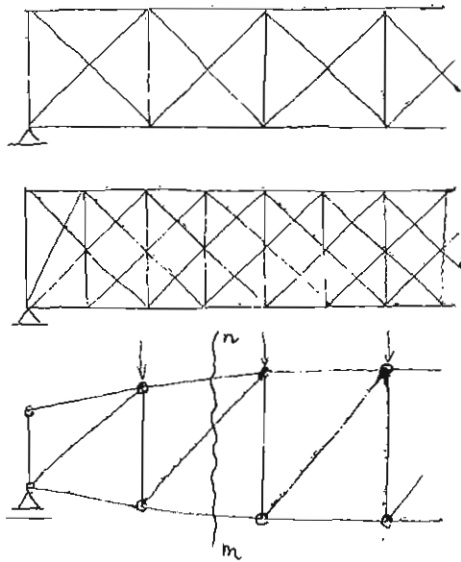
In Inghilterra le prime incavallature metalliche furono costruite nel 1845.



Nel 1846 si introdusse il sistema WARREN (v. fig.) il cui calcolo corretto, secondo la testimonianza di FAIRBAIN (On the Application of Cast and Wrought Iron, 2^a ed. 1857), fu

elaborato da W. B. BLOOD nel 1850. In Francia, già dal 1848, M. MICHON aveva studiato metodi per il calcolo di grandi coperture reticolari e ne aveva fatto argomento di lezione presso la scuola militare di Metz.

Notevoli progressi nello studio dello schema di HOWE e anche di schemi



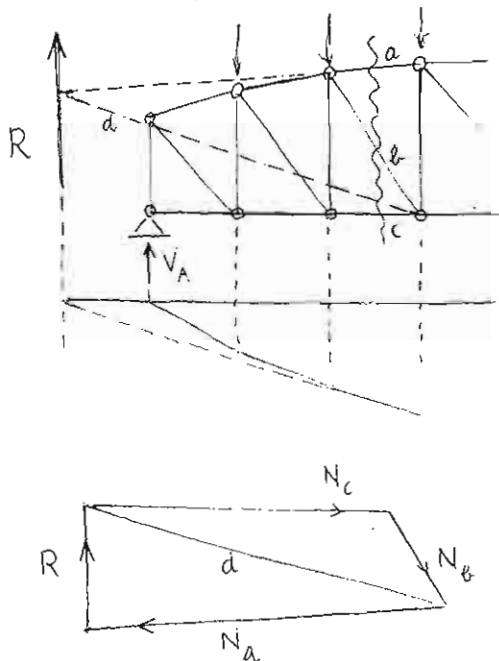
più complessi si debbono al JOURAWSKI il quale, con ingegnosi argomenti, tentò di risolvere per via statica tali strutture iperstatiche, sotto particolari condizioni di carico (1850)

Furono soprattutto però due ingegneri tedeschi, J.W. SCHWEDLER e A. RITTER che ottennero metodi semplici ed efficaci per l'analisi delle strutture reticolari staticamente determinate. Schwedler riferisce alla trave reticolare la relazione di equilibrio:

$$T = \frac{dM}{dz}$$

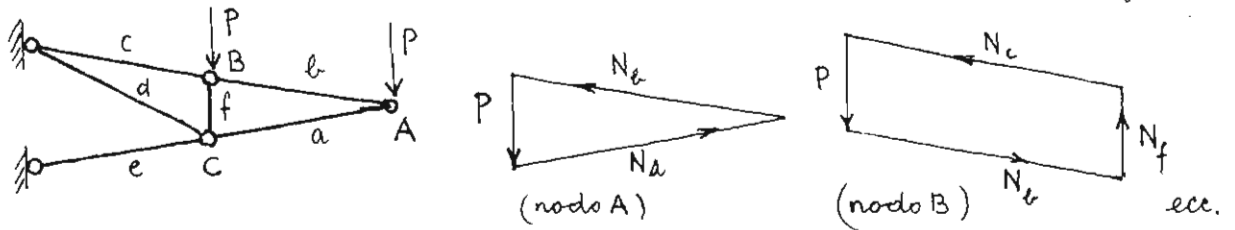
Nota la forza di taglio T e il momento M le equazioni della statica consentono di trovare gli sforzi nelle aste. Ritter semplificò ulteriormente il calcolo usando le equazioni di equilibrio alla rotazione intorno ai punti di intersezione di due delle tre aste sezionate.

In questa rapida rassegna degli ingegneri che si occuparono per primi delle travature reticolari non può essere dimenticato KARL CULMANN (1821, 1881), al quale spetta l'indubbio merito di aver introdotto sistematicamente i metodi grafici nell'analisi di ogni tipo di strutture: il suo trattato fondamentale è appunto "Die graphische Statik", Zürich 1866 (ed. franc. del 1880); la sua influenza nella ingegneria strutturale fu grandissima.



Il procedimento suggerito da Culmann per il calcolo della forza normale nelle aste è ben noto dal Corso di Statica. Se la sezione S taglia solo tre aste non concorrenti a, b, c , si valuta (graficamente) la risultante R di tutte le forze che stanno ad es. a sinistra di S . A questo punto, la determinazione di N_a, N_b, N_c è ricondotta al problema di decomporre la R nelle tre direzioni a, b, c ; il che si effettua decomponendo dapprima la R secondo a e d e quindi la componente in d secondo b e c .

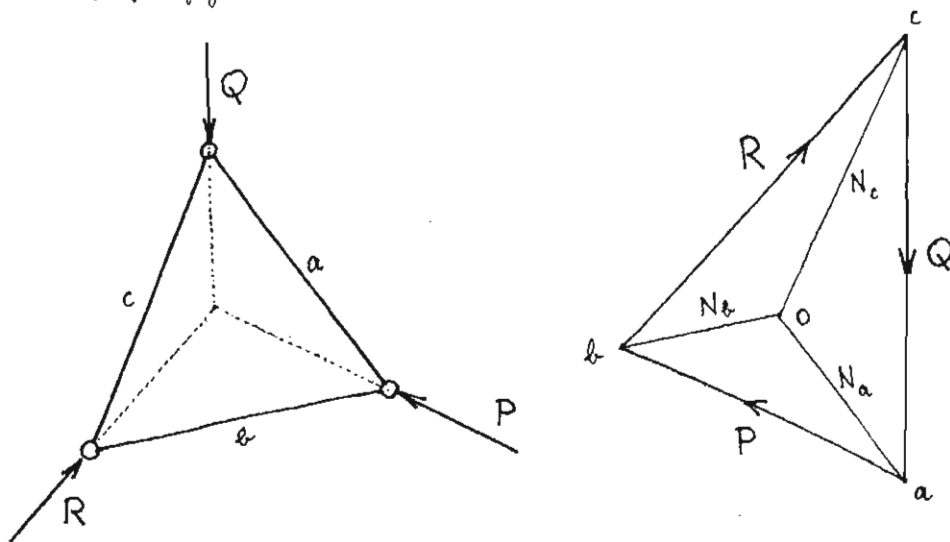
Culmann propose, anche, per le travature "a nodi canonici", la soluzione che s'avvale di poligoni di equilibrio per nodi consecutivi (vedi fig.)-



Tuttavia si deve a J.C. MAXWELL e a L. CREMONA l'inquadramento teorico rigoroso di tale metodo alla luce delle relazioni di reciprocità in statica grafica introdotte, appunto, da Maxwell⁽¹⁾ (On reciprocal figures and diagrams of forces, Phil. Mag. 27, 250 (1864)) e sviluppate da Cremona (Le figure reciproche nella statica grafica, Milano 1872).

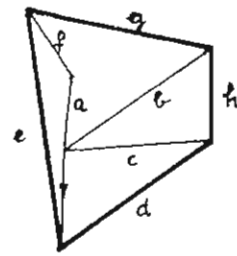
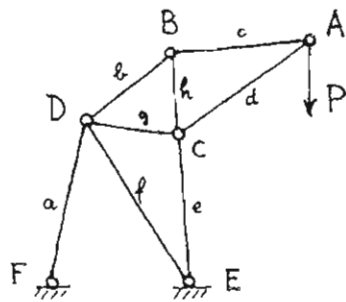
Limitandoci ad un semplice cenno, ricordiamo che "due figure piane sono reciproche quando consistono di un ugual numero di linee, tali che le linee corrispondenti nelle due figure sono parallele, e le linee che in una figura convergono in un punto, hanno per corrispondenti, nell'altra, linee che formano un poligono chiuso" (Maxwell). Orbene, nel calcolo delle strutture reticolari si può associare al diagramma rappresentativo della struttura e delle forze, un diagramma reciproco rappresentativo dello stato di sollecitazione.

L'esempio più semplice è quello di una cella reticolare costituita da tre aste (cfr. fig.)



(1) Agli stessi risultati di Maxwell pervenne, indipendentemente, anche W.P. TAYLOR (Cfr. F. Jenkin, Transl. Roy. Soc. Edinburgh 25, 441 (1869), cit. da S. Timoshenko, op. cit. p. 202).

Come è noto dal corso di Statica, L. Cremona ha grandemente approfondito, con strumenti tratti dalla Geometria Proiettiva, lo studio della reciprocità per le travature reticolari, riunendo in un'unica figura i poligoni di equilibrio di tutti i nodi. Ad ogni retto della travatura, sia essa un'asta o la retta d'azione di una forza esterna corrisponde nel diagramma un lato parallelo che misura lo sforzo nell'asta o la forza esterna.



[Ricordare che :
 ————— "puntioni"
 ————— "tiranti"]

V'è, nella trattazione di Cremona, come già in quella di Maxwell un segno del crescente interessamento per le travature reticolari da parte di scienziati attenti ai problemi tecnici o addirittura da parte di matematici che se ne valsero anche come di un "banco di prova" per mettere a punto metodi di calcolo successivamente riconosciuti suscettibili di ampie generalizzazioni.

Emergono, da questo punto di vista, i nomi di A. F. MÖBIUS (1790-1868)⁽¹⁾, di J. C. Maxwell, di O. MOHR, di N. E. JOUKOWSKI, di H. MÜLLER-BRESLAU, di L. HENNENBERG, di C. SAVIOTTI, di F. SCHUR, di M. WILLIOT, e infine di A. FÖPPL⁽²⁾.

Distingueremo per chiarezza tre problemi attinenti alle strutture reticolari affrontati da questi studiosi: 1) La soluzione statica di travature reticolari iperstatiche non "canoniche"; 2) La determinazione di spostamenti in travature reticolari iperstatiche; 3) La soluzione di travature reticolari iperstatiche.

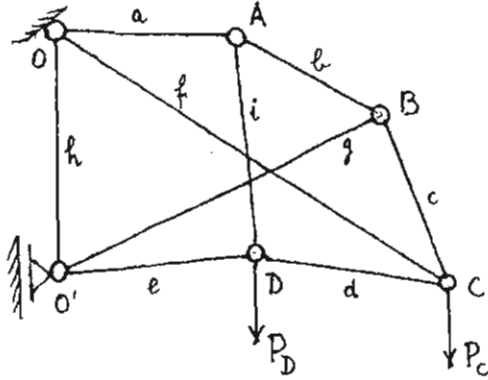
Come si vedrà, i metodi proposti pongono in risalto la grande efficacia

(1) A Möbius (Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837) si deve la nota condizione di "rigidità": $a = 2n - 3$ (dove a indica il numero delle aste e n è il numero dei nodi).

(2) Il testo di Föppl "Das Fachwerk im Raum" Leipzig 1892 è fondamentale per l'analisi delle strutture reticolari spaziali. Tra l'altro si deve a Föppl la definizione rigorosa della condizione necessaria e sufficiente per la rigidità (già studiata nel corso di Statica).

del principio dei lavori virtuali nella meccanica delle strutture.

Soluzione statica di travi reticolari isostatiche non canoniche

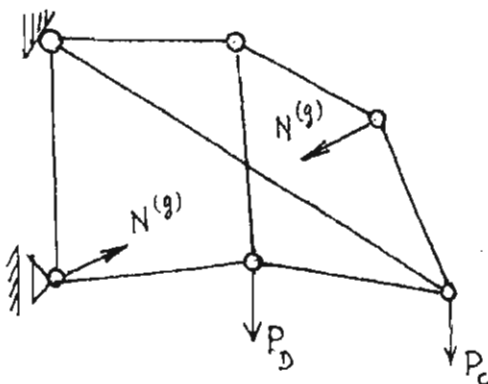


Si consideri ad esempio la struttura della figura accanto. Pur essendo essa isostatica, la determinazione delle sollecitazioni nelle aste non può valersi delle tecniche elementari di Schwedler, di Ritter, di Culmann e di Cremona, viste sopra. Naturalmente resta sempre disponibile la possibilità di imporre nodo per nodo l'equilibrio, ottenendo così $2n$ equazioni (se n è il numero dei nodi) che, associate alle tre equazioni cardinali della statica determinano completamente la forza normale nelle aste. D'altra parte, questo procedimento è molto laborioso e difficilmente può essere seguito senza l'ausilio del calcolatore per la soluzione del sistema algebrico lineare cui alla fine si perviene. Nel caso della struttura qui in esame si tratterebbe di un sistema in $9+3$ incognite.

Fu O. Mohr (in *Z. Architekt. und Ing. Ver.*, Hannover, 509 (1874); *Ziviling.*, 289 (1885)) a proporre un metodo semplice e geniale fondato sul principio dei lavori virtuali (nella forma degli spostamenti virtuali).

Si noti che, per l'isostaticità del sistema, è lecito, nella soluzione statica, supporre che le aste siano rigide. Ciò consente di porre nella equazione (1.27) di pag. 152, $\delta L_u^{int.} = 0$; l'equazione dei lavori virtuali diventa pertanto:

$$\delta L_u^{est.} = 0 \quad (4.1)$$



Al fine di determinare, ad es., la forza normale nell'asta g , si elimini dunque l'asta stessa e si sostituiscano in O' e in B le forze $N^{(g)}$ espresse dell'azione esercitata da g sul resto della struttura.

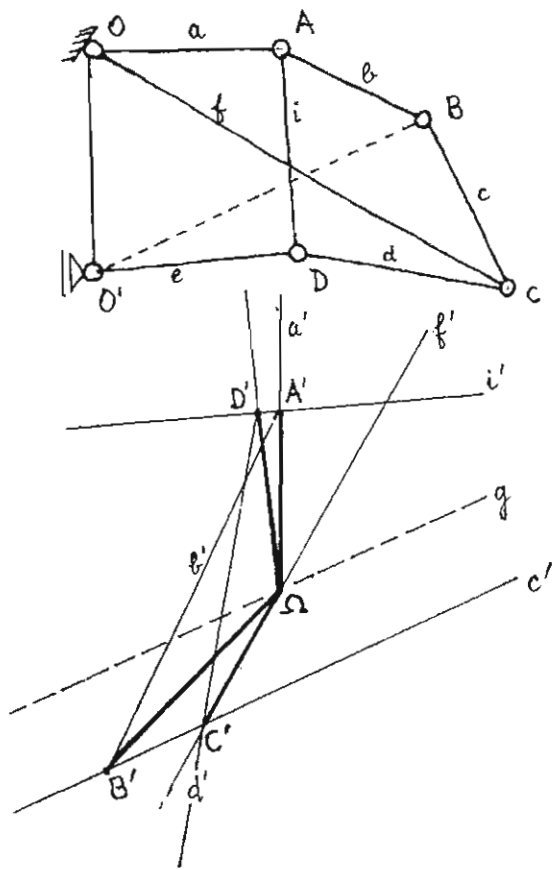
A questo punto, le forze $N^{(g)}$ figurano nella

nuova struttura (labile, perché priva di g) come forze esterne. La (4.1) si esprime dunque così:

$$P_C \delta \eta_C + P_D \delta \eta_D + N^{(g)} \delta \eta_B^{(g)} = 0 \quad (4.2)$$

dove $\delta \eta_C$, $\delta \eta_D$, $\delta \eta_B^{(g)}$ sono gli spostamenti virtuali dei nodi C, D, B valutati nella direzione e nel verso di P_C , P_D , $N^{(g)}$ rispettivamente.

Per trarre dalla (4.2) il valore di $N^{(g)}$ occorre determinare $\delta \eta_C$, $\delta \eta_D$, $\delta \eta_B^{(g)}$ in funzione di un solo parametro virtuale.



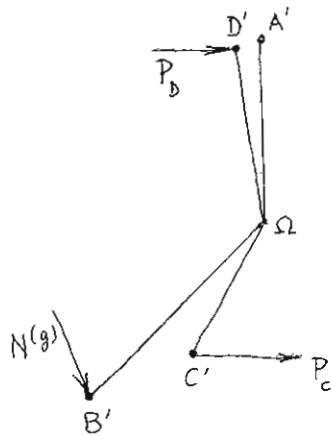
A questo scopo, O. Mohr propone la costruzione grafica rappresentata in figura.

Per comprenderne il significato, basta ricordare che lo spostamento virtuale dell'estremità di un'asta è infinitesimo e quindi ha direzione \perp all'asta stessa. Ad es. lo spostamento virtuale dell'estremità in A dell'asta a (coincidente con lo spostamento virtuale del nodo A), pur essendo arbitrario in modulo è \perp all'asta a. Analogamente lo spostamento virtuale dell'estremo C dell'asta f (coincidente con lo spostamento del nodo C) è \perp a f; e lo spostamento virtuale dell'estremo D dell'asta e (coincidente con lo spostamento del nodo D) è \perp all'asta e.

Con ciò sono determinati in direzione gli spostamenti delle aste che hanno un estremo vincolato all'esterno.

Pertanto, a partire da un punto Ω di riferimento si possono tracciare tre rette a' , f' , e' perpendicolari rispettivamente ad a , f , e : gli spostamenti di A, di C e di D si dispongono su di esse. Preso poi un vettore arbitrario $\vec{\Omega A'}$ sulla prima retta, rappresentativo dello spostamento virtuale di A, si conducono da A' le rette $b' \perp$ alla asta b e $i' \perp$ all'asta i. Il vettore $\vec{\Omega D'}$ rappresenta lo spostamento di D. Ora, da D' si traccia la retta $d' \perp$ all'asta d; la sua intersezione con f' determina il punto C' e il vettore $\vec{\Omega C'}$ misura lo spostamento di C. Infine, da C' si traccia la retta $c' \perp$ all'asta c; la sua intersezione con b' determina il punto B' , e il vettore $\vec{\Omega B'}$ fornisce lo spostamento di B. Ormai gli spostamenti virtuali dei nodi sono tutti determinati in funzione dello spostamento virtuale del nodo A; l'equazione (4.2) può essere dunque facilmente risolta. Se le forze P_C , P_D sono tutte verticali, le quantità $\delta \eta_C$, $\delta \eta_D$ sono

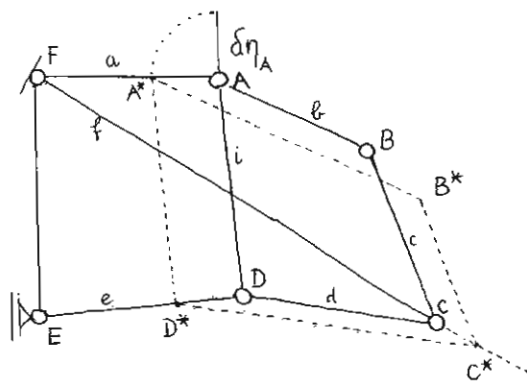
date dalle proiezioni verticali dei vettori $\vec{\Omega C'}$ e $\vec{\Omega D'}$, mentre $\delta\eta_B^{(g)}$ è la proiezione di $\vec{\Omega B'}$ lungo la retta g parallela ad EB.



N. E. Joukowski (1847, 1921), fondatore della teoria dell'aerodinamica, si occupò lateralmente di questo stesso problema in una memoria presentata alla

società matematica di Mosca nel 1908, osservando che l'equazione dei lavori virtuali (4.2) può essere interpretata come "ideale" equazione di equilibrio alla rotazione delle forze $P_C, P_D, N^{(g)}$ applicate nei punti C', D', B' del diagramma degli spostamenti e ruotate di $\frac{\pi}{2}$.

Un metodo diverso per determinare gli spostamenti virtuali fu proposto da H. Müller-Breslau (Schweiz. Bauztg. 9, 121, 1887). Concettualmente, esso non aggiunge nulla a quel che si è già detto; risulta però di semplice applicazione.



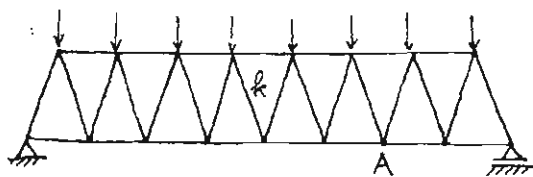
Fissato ad arbitrio lo spostamento $\delta\eta_A$ del nodo A, lo si ruota di $\frac{\pi}{2}$ sull'asta a ottenendo il punto A^* ; la parallela condotta da A^* all'asta i determina il punto D^* , e il vettore DD^* misura lo spostamento di D (ruotato di $\frac{\pi}{2}$); la parallela da D^* all'asta d fornisce, sulla retta dell'asta f, il punto C^* , e il vettore CC^* rappresenta lo spostamento di C (ruotato di $\frac{\pi}{2}$); infine lo spostamento di B è analogamente ottenuto dalla intersezione delle rette A^*B^* e C^*B^* parallele alle aste b e c rispettivamente.

Determinazione dello stato di spostamento in travi reticolari isostatiche.

Per questo problema, come per quello che sarà trattato nel seguente paragrafo, la soluzione completa deve essere attribuita al grande scienziato inglese J. CLERK MAXWELL⁽¹⁾ (Phil. Mag. 27, p. 294 (1864)). Tuttavia, il lavoro di Maxwell restò sconosciuto all'ambiente tecnico per numerosi anni, e solo nel 1874 la stessa soluzione fu riscoperta e divulgata da O. MOHR (Z. Architek. u. Ing. Ver. Hannover 1874, p. 509; 1875, p. 17), quando già si stavano affermando i metodi di analisi strutturale fondati sul principio di Menabrea (1858) e sui teoremi di Castigliano (1873).

Il metodo proposto da Maxwell è, secondo le parole dello stesso Maxwell, un'applicazione del teorema di Clapeyron. Invece, nella sua riformulazione ad opera di O. Mohr, diventa un'applicazione del principio dei lavori virtuali (nella forma delle forze virtuali). Questa seconda interpretazione è più importante, poiché si presta meglio ad estendere il procedimento a numerosi casi (di non linearità o di anelasticità) in cui il teorema di Clapeyron vien meno o comunque richiede diversa definizione.

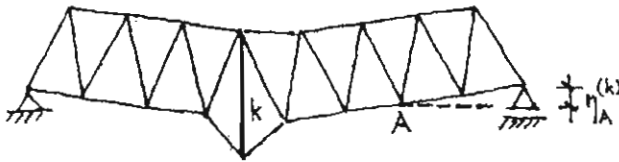
Quindi qui ci riferiremo alla trattazione di Mohr, e cioè all'utilizzo del principio dei lavori virtuali per determinare lo spostamento di un punto generico di una trave reticolare isostatica.



Con riferimento alla struttura della figura accanto, ci si proponga ad es. di determinare lo spostamento verticale η_A del nodo A.

(1) C. Maxwell nacque a Edinburgo nel 1831. Si dedicò dapprima ad attività sperimentale nel laboratorio di NICOL, l'inventore del prisma polarizzante, e collaborò all'analisi fotoclastica delle tensioni. Nel 1850 si stabilì a Cambridge dove continuò i suoi studi diplomandosi nel 1855. Iniziò quindi la carriera accademica. Insegnò al Marischal College di Aberdeen sino al 1860; al King's College di Londra sino al 1865 e, dopo un quinquennio interamente dedicato alla ricerca, a Cambridge. Morì nel 1879. Gli interessi scientifici di Maxwell furono vastissimi, dalla teoria cinetica dei gas, alla termodinamica, all'elettromagnetismo, all'ottica, alla meccanica celeste, alla meccanica strutturale; e in ogni campo i suoi contributi rappresentarono vere pietre miliari nello sviluppo delle scienze.

A questo scopo, Mohr, come già Maxwell, valuta dapprima l'effetto sullo spostamento verticale di A prodotto dalla deformazione della generica asta k -esima,



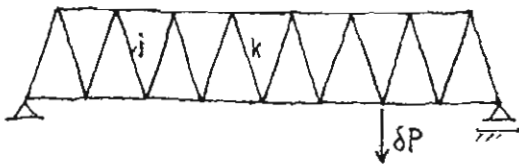
supponendo cioè, per un momento, che solo l'asta k sia deformabile e tutte le altre aste siano invece rigide. La deformazione

dell'asta k è data, come si sa, dalla espressione:

$$\epsilon^{(k)} = \frac{N^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.3)$$

dove l'indice k indica l'asta considerata. Per calcolare il contributo $\eta_A^{(k)}$ dato da $\epsilon^{(k)}$ allo spostamento complessivo η_A , si consideri il sistema car-

cato da una sola forza verticale in A di intensità infinitesima e arbitraria δP .



La soluzione statica di questo sistema fornirà per ogni asta j il valore della forza normale $\delta N^{(j)}$. Anzi, come

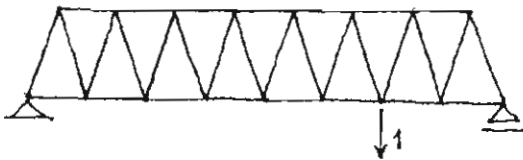
abbiamo già ripetuto sino alla noia, per la linearità delle equazioni di equilibrio, si ha proporzionalità lineare tra la causa (δP) e l'effetto ($\delta N^{(j)}$); quindi, se si indica con $N_1^{(j)}$ l'effetto corrispondente a una forza unitaria verticale in A, vale la proporzione:

$$\delta P : \delta N^{(j)} = 1 : N_1^{(j)}$$

da cui:

$$\delta N^{(j)} = N_1^{(j)} \delta P; \quad (4.4)$$

cioè vuol dire che per determinare le $\delta N^{(j)}$ corrispondenti alla forza virtuale δP , basta risolvere il sistema caricato con una forza unitaria disposta come δP e utilizzare successivamente la (4.4).



Ebbene, applichiamo il principio dei lavori virtuali nella forma delle forze virtuali. Come sistema caratteristiche di sollecitazione / forze equilibrato e virtuale consideriamo appunto il sistema costituito dalla forza esterna virtuale δP in A e dalle corrispondenti $\delta N^{(j)}$ in tutte le aste.

Come sistema caratteristiche di sollecitazione/spostamento consideriamo il sistema costituito dalla deformazione $\epsilon^{(k)}$ dell'asta k (unica asta deformabile) e dai corrispondenti spostamenti indotti sui nodi.

Si osservi che, mentre il sistema $\{\delta N^{(j)}, \delta P\}$ equilibrato virtuale è completamente noto (per δP assegnato), il sistema deformazioni/spostamenti è noto solo parzialmente: si conosce cioè la deformazione $\epsilon^{(k)}$ ma non si conosce, ad es., lo spostamento $\eta_A^{(k)}$. Ma è appunto il principio dei lavori virtuali che consente di colmare questa lacuna. Infatti, il lavoro virtuale esterno si esprime nell'unico termine:

$$\eta_A^{(k)} \delta P$$

poiché δP in A è l'unica forza esterna virtuale che possa compiere lavoro; invece il lavoro virtuale interno si esprime nel termine:

$$\int_0^{l^{(k)}} \epsilon^{(k)} \delta N^{(k)} dx$$

(dove $l^{(k)}$ è la lunghezza dell'asta k), poiché solo l'asta k è, per ora, supposta deformabile. Si ha dunque:

$$\eta_A^{(k)} \delta P = \int_0^{l^{(k)}} \epsilon^{(k)} \delta N^{(k)} dx$$

e, ricordando le (4.3) (4.4):

$$\eta_A^{(k)} \delta P = \frac{N^{(k)} N_1^{(k)} l^{(k)}}{EA^{(k)}} \delta P$$

da cui:

$$\eta_A^{(k)} = \frac{N^{(k)} N_1^{(k)} l^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.5)$$

Finalmente, lo spostamento complessivo η_A sarà dato dalla somma di tutti i contributi dovuti alla deformazione di tutte le aste; ossia:

$$\eta_A = \sum_{k=1}^n \eta_A^{(k)}$$

(n sia il numero delle aste), e quindi:

$$\eta_A = \sum_{k=1}^n \frac{N^{(k)} N_1^{(k)} l^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (3.34)$$

La formula ottenuta coincide naturalmente con quella che deriverebbe dalla applicazione del teorema di Castigliano, come del resto abbiamo già rilevato a pag. 179.

Si deve sempre a O. Mohr (Z. Architek. und Ing. Ver. Hannover 1875, p. 17) una interessante rilettura della formula:

$$\eta_A^{(k)} = \frac{N_1^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}} \ell^{(k)} \quad (4.5)$$

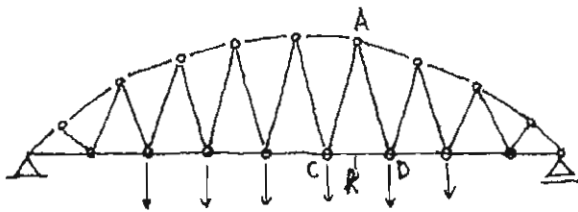
che idealmente collegandosi al celebre corollario enunciato da Mohr sette anni addietro (nel 1868), consente di calcolare in modo semplicissimo lo spostamento in un punto generico di una travatura reticolare dovuto all'elongazione di qualsiasi asta k .

Anzitutto si osservi che tale elongazione $\Delta \ell^{(k)}$ è fornita da:

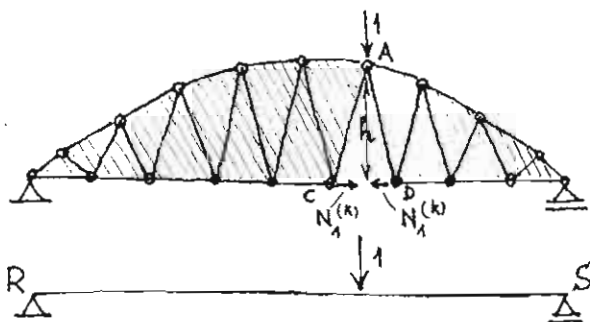
$$\Delta \ell^{(k)} = \frac{N_1^{(k)} \ell^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.6)$$

per cui la (4.5) può anche scriversi:

$$\eta_A^{(k)} = \Delta \ell^{(k)} N_1^{(k)} \quad (4.7)$$



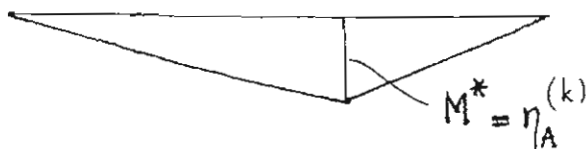
indotta da una forza unitaria in A. Anziché risolvere il problema nel suo complesso, ad es. col metodo di Ritter, si può subito osservare che $N_1^{(k)}$ è determinata dal



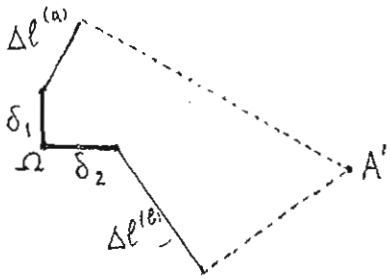
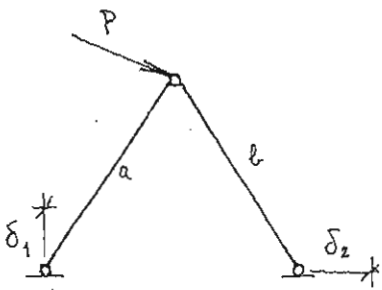
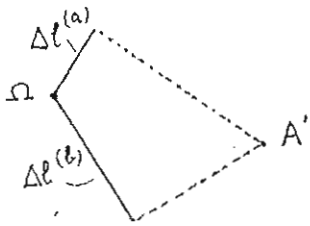
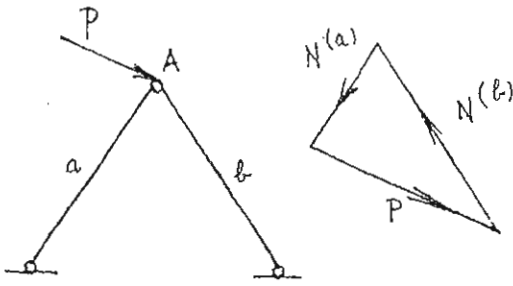
"momento flettente" in A diviso per la distanza h . Ne segue che la formula (4.7) può essere interpretata come il momento flettente M^*

in A in una trave ausiliaria RS caricata da una forza fittizia $P^* = \frac{\Delta \ell^{(k)}}{h}$

(dimensionalmente P^* è un numero puro!).

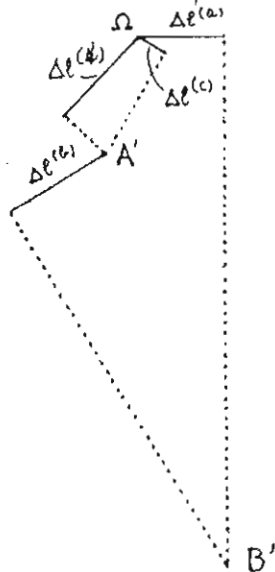
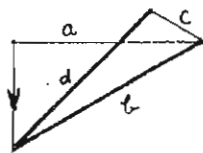
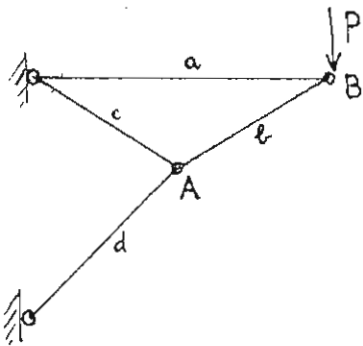


Nel 1877, WILLIOT propose (in "Notions pratiques sur la Statique Graphique", Ann. du Génie Civil, p. 713) un metodo grafico per la determinazione degli spostamenti di tutti i nodi di una travatura reticolare elastica, che, per la sua elementare semplicità ottenne una certa diffusione. Note, per tutte le aste le quantità $\Delta l^{(k)}$, la valutazione degli spostamenti dei nodi è un problema di composizione cinematica (o geometrica) che le usuali ipotesi di infinitesimalità rendono facilmente risolvibile. Si consideri dapprima il sistema costituito da due sole aste (vedi fig.); noti $\Delta l^{(1)}$ e $\Delta l^{(2)}$ in modulo direzione e verso, si riportino, a partire da un punto Ω di riferimento. Lo spostamento del nodo A si ottiene tracciando dai secondi estremi dei segmenti $\Delta l^{(1)}$ e $\Delta l^{(2)}$ le perpendicolari ai segmenti stessi e determinandone l'intersezione A' . Il segmento $\Omega A'$ misura appunto lo spostamento voluto. Infatti, gli spostamenti degli estremi in A dell'asta (1) e dell'asta (2), essendo valutati rispetto alle lunghezze $l^{(1)}$ e $l^{(2)}$, si realizzano normalmente alla direzione delle aste.



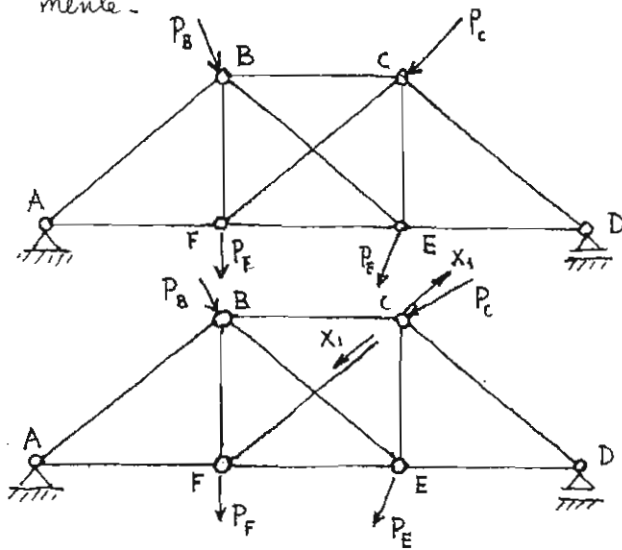
Se i vincoli subiscono cedimenti δ_1 e δ_2 (v. fig. (B)) il diagramma che determina lo spostamento di A si modifica come indicato.

Per strutture più complesse, il diagramma di Williot consiste nella applicazione ripetuta di quel che si è fatto per la struttura precedente. Vedi l'esempio in fig.



Soluzione delle travature reticolari iperstatiche

L'applicazione del principio dei lavori virtuali (nella forma delle forze virtuali) che abbiamo veduta nel paragrafo precedente, si presta bene anche alla soluzione delle travature reticolari iperstatiche. Anche se alla fine si perviene, nel caso elastico lineare, alle stesse formule risolutive che si sono già ottenute seguendo il metodo di Castigliano, qui si ricoprirà dettagliatamente il procedimento, anche in vista delle generalizzazioni cui si accennerà successivamente.



Riferiamoci per ora ad una struttura una volta iperstatica, come quella seguita in figura. Assumiamo come sistema principale il sistema nel quale si è operata la sconnessione all'estremo C dell'asta sovrabbondante CF. Allora il sistema equivalente è rappresentato dallo schema accanto, dove X_1 indica la sollecitazione iperstatica.

Lo stato di deformazione nel sistema equivalente (identico a quello del sistema effettivo) è dato, per ogni asta k , dalla:

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{N^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.3)$$

dove, come già sappiamo (vedi pag.), è:

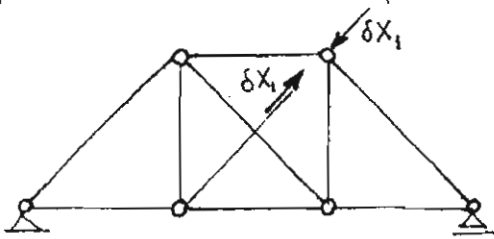
$$N^{(k)} = N_0^{(k)} + N_1^{(k)} X_1 \quad (4.8)$$

$N_0^{(k)}$ indica la forza normale nell'asta k indotta dal solo carico esterno agente nel sistema principale, $N_1^{(k)}$ indica invece la forza normale ivi indotta da due forze unitarie poste come X_1 . Si noti che, se a X_1 non è assegnato il valor vero, lo stato di deformazione / spostam. non è congruente, nel senso che non garantisce l'annullarsi dello spostamento relativo η , tra le due facce della sconnessione in C. Per imporre la condizione di congruenza si può utilizzare il principio dei lavori virtuali nella forma delle forze virtuali.

Abbiamo infatti veduto a pag. 153 che, accanto alla formulazione diretta del teorema dei lavori virtuali anche formulazioni alternative. Ossia, da un lato si è dimostrato che associando a uno stato di spostamento / deformazione congruente

uno stato di forze / sollecitazioni equilibrato virtuale vale il teorema dei lavori virtuali (nella forma delle forze virtuali); ma d'altro lato si è anche dimostrato che, se uno stato di spostamento / deformazione, associato a uno stato di forze / sollecitazioni equilibrato virtuale, soddisfa il principio dei lavori virtuali (nella forma delle forze virtuali) allora tale stato di spostam./deform. è congruente.

Dobbiamo dunque scegliere un opportuno sistema di forze / sollecitazioni equilibrato virtuale. A questo scopo, consideriamo il sistema seguente, nel



quale le sole forze agenti sono due forze virtuali δX_1 , poste come X_1 sulle due facce della sconnesione.

Nelle diverse aste si manifesterà una forza normale virtuale equilibrata con δX_1 , esprimibile nella forma:

$$\delta N^{(k)} = N_1^{(k)} \delta X_1$$

Scriviamo ora l'equazione dei lavori virtuali. Il lavoro virtuale esterno si ottiene associando alle forze virtuali δX_1 gli spostamenti effettivi ad esse relativi; $\delta L_f^{est.}$ è pertanto fornito dalla espressione:

$$\delta L_f^{est.} = \delta X_1 \cdot \eta_1' + \delta X_1 \cdot \eta_1'' \quad (4.9)$$

dove η_1' ed η_1'' sono gli spostamenti assoluti dell'una e dell'altra faccia della sconnesione in C, presi positivi se concordi con le rispettive δX_1 .

La (4.9) può scriversi anche così:

$$\delta L_f^{est.} = \delta X_1 (\eta_1' + \eta_1'') = \delta X_1 \cdot \eta_1 \quad (4.10)$$

essendo η_1 lo spostamento relativo delle due facce della sconnesione in C nella direzione e nel verso di δX_1 . Come abbiamo già detto, dovremo imporre, per la congruenza,

$$\eta_1 = 0$$

Il lavoro virtuale interno è invece ottenuto, al solito, associando alla forza normale virtuale $\delta N^{(k)}$ di ogni asta k la deformazione effettiva

$$\epsilon^{(k)} = \frac{N^{(k)}}{EA^{(k)}}$$

valutata nel sistema equivalente mediante la (4.8). Si ha perciò:

(n è il numero delle aste)

$$\begin{aligned} \delta L_f^{int.} &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\rho^{(k)}} \varepsilon^{(k)} \delta N^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \int_0^{\rho^{(k)}} \frac{N_0^{(k)} + N_1^{(k)} X_1}{EA^{(k)}} N_1^{(k)} \delta X_1 dz \\ &= \delta X_1 \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{N_0^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}} + \frac{N_1^{(k)2}}{EA^{(k)}} X_1 \right\} \end{aligned}$$

Finalmente, l'equazione dei lavori virtuali si traduce nella:

$$\eta_{11} \delta X_1 = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{N_0^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}} + \frac{N_1^{(k)2}}{EA^{(k)}} X_1 \right\} \delta X_1$$

Ora appare chiara l'opportunità della scelta effettuata per il sistema forze/sollecitazioni equilibrato virtuale. La condizione di congruenza $\eta_1 = 0$ fornisce subito l'equazione determinatrice di X_1 :

$$\sum_{k=1}^n \frac{N_0^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}} + X_1 \sum_{k=1}^n \frac{N_1^{(k)2}}{EA^{(k)}} = 0$$

nella quale possiamo facilmente riconoscere la formula già a suo tempo dedotta:

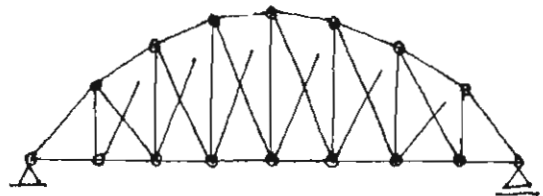
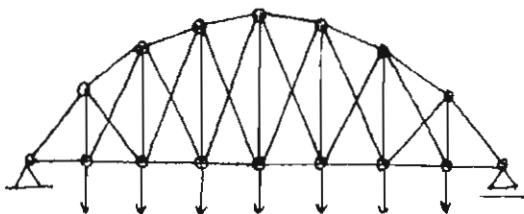
$$\eta_{10} + \eta_{11} X_1 = 0$$

con:

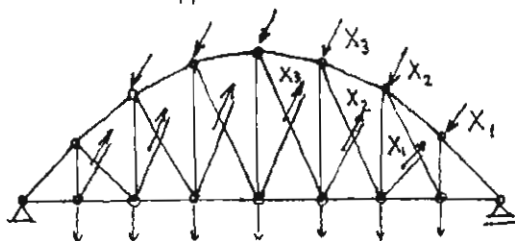
$$\eta_{10} = \sum_{k=1}^n \frac{N_0^{(k)} N_1^{(k)}}{EA^{(k)}}$$

$$\eta_{11} = \sum_{k=1}^n \frac{N_1^{(k)2}}{EA^{(k)}}$$

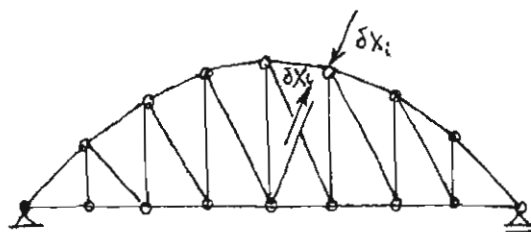
Il caso di una struttura più volte iperstatica si tratta in modo del tutto prevedibile, a questo punto. Lo schema della pagina seguente, riferito all'esempio della figura sintetizza brevemente il discorso. Sia n il numero delle aste e π il numero delle iperstatiche.



Sistema spostamenti/
deformazioni (congruente)
effettivo



Sistema forze/
sollecitazioni equilibrato
virtuale



$$\begin{aligned} \epsilon^{(k)} &= \frac{N^{(k)}}{EA^{(k)}} = \\ &= \frac{N_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n N_j^{(k)} X_j}{EA^{(k)}} \end{aligned}$$

$$\delta N_i^{(k)} = N_i^{(k)} \delta X_i$$

Principio dei lavori virtuali:

$$\eta_i \delta X_i = \sum_{k=1}^n \int_0^{\ell^{(k)}} \frac{N_0^{(k)} + \sum_{j=1}^n N_j^{(k)} X_j}{EA^{(k)}} N_i^{(k)} \delta X_i dz$$

Da cui:

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n \frac{N_0^{(k)} N_i^{(k)}}{EA^{(k)}} \ell^{(k)} + \sum_{j=1}^n X_j \sum_{k=1}^n \frac{N_j^{(k)} N_i^{(k)}}{EA^{(k)}} \ell^{(k)}$$

Orvero, con le solite posizioni:

$$\eta_i = \eta_{i0} + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} X_j \quad (4.11)$$

La condizione di congruenza è $\eta_i = 0$ (nullo lo spostamento relativo delle facce della connessione corrispondente a X_i); quindi le (4.11) diventano, nel nostro caso:

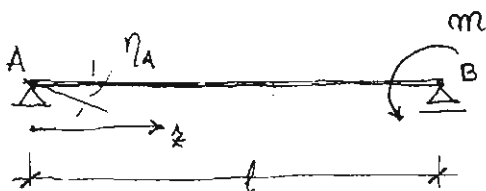
$$\eta_{i0} + \sum_{j=1}^n \eta_{ij} X_j = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

7.5. ESTENSIONE DEL METODO DI MAXWELL-MOHR USO SISTEMATICO DEL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI

L'applicazione del principio dei lavori virtuali all'analisi delle strutture non è limitata soltanto alle travature reticolari. Il metodo che abbiamo sopra studiato si estende facilmente a qualsiasi struttura monodimensionale. Poiché ormai sono stati illustrati a lungo gli aspetti concettuali del procedimento, è sufficiente limitarci ad un richiamo schematico, riferendoci ad alcuni esempi elementari.

Determinazione di spostamenti (in travi o travature isostatiche)

[1]



Sistema spostam./deform.
(congruente) effettivo

$$\epsilon = \frac{N}{EA} = 0$$

$$\gamma = \frac{T}{GK} \approx 0 \quad \left[\text{trascuriamo l'effetto deformativo del taglio} \right]$$

$$\kappa = \frac{M}{EJ} = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{mz}{l}$$

Calcoliamo la rotazione in A, η_A .

Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale



$$\delta N = 0$$

$$\delta T = -\frac{1}{l} \delta m z$$

$$\delta M = \left(1 - \frac{z}{l}\right) \delta m z$$

Il principio dei lav. virtuali dà:

$$\eta_A \delta m = \int_0^l (\epsilon \delta N + \gamma \delta T + \kappa \delta M) dz$$

dove η_A è la rotazione in A valutata positiva se concorde con δm

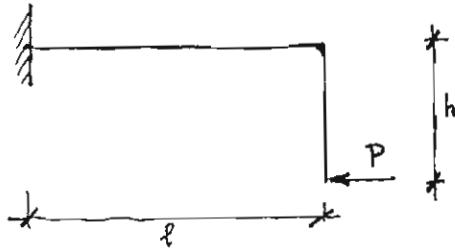
Sostituendo si ottiene:

$$\eta_A \delta m = \left\{ \int_0^l \frac{1}{EJ} \left(\frac{m}{l} z - \frac{m}{l^2} z^2 \right) dz \right\} \delta m$$

da cui:

$$\eta_A = \frac{m l}{EJ}$$

[2]



Sistema spostam./deform.
(congruente) effettivo

$$\text{in AB: } \epsilon = -\frac{P}{EA}$$

$$\kappa = -\frac{Ph}{EJ}$$

$$\text{in BC: } \epsilon = 0$$

$$\kappa = -\frac{Pz'}{EJ}$$

Calcoliamo lo spostamento orizzontale
di C, η_C .

Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale



$$\text{in AB: } \delta N = -\delta P$$

$$\delta M = -h\delta P$$

$$\text{in BC: } \delta N = 0$$

$$\delta M = -z'\delta P$$

Principio dei lavori virtuali:

$$\eta_C \delta P = \int_0^l (\epsilon \delta N + \kappa \delta M) dz + \int_0^h \kappa \delta M dz'$$

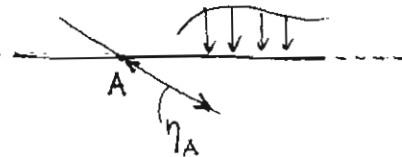
da cui:

$$\eta_C \delta P = \left\{ \int_0^l \left(\frac{P}{EA} + \frac{Ph^2}{EJ} \right) dz + \int_0^h \frac{Pz'^2}{EJ} dz' \right\} \delta P$$

Infine:

$$\eta_C = \frac{Pl}{EA} + \frac{Ph^2 l}{EJ} + \frac{Ph^3}{3EJ}$$

[3]

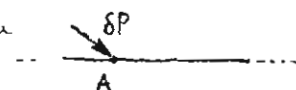


Sistema spostam./deform.
(congruente) effettivo

$$\epsilon = \frac{N}{EA} \quad \gamma \approx 0 \quad \kappa = \frac{M}{EJ}$$

Caso generale - Calcoliamo lo spostamento in
A secondo una direzione assegnata.

Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale



$$\delta N = N_1 \delta P \quad \delta M = M_1 \delta P$$

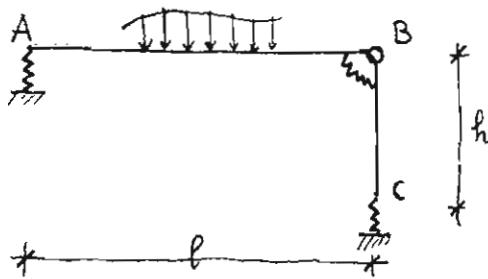
Principio dei lavori virtuali:

$$\eta_A \delta P = \int_S (\epsilon \delta N + \kappa \delta M) dz = \int_S \left(\frac{N}{EA} N_1 + \frac{M}{EJ} M_1 \right) \delta P dz \quad (S: \text{tutta la struttura})$$

Da cui:

$$\eta_A = \int_S \left(\frac{NN_1}{EA} + \frac{MM_1}{EJ} \right) dz$$

[4] Presenza di vincoli (o di connessioni) cedevoli elasticamente.



Calcoliamo ad es. la rotazione in A, η_A .
 La cedevolezza elastica è rappresentata dalle molle segnate in figura, per le quali si suppone nota la "rigidezza" K , ovvero la "flessibilità" F . Per la molla in A si afferma cioè che lo

spostamento trasversale v_A è direttamente proporzionale alla reazione in A e quindi al taglio T_A , secondo la:

$$T_A = K_A v_A$$

o equivalentemente, secondo la:

$$v_A = \frac{F_A T_A}{K_A} \quad \text{con} \quad F_A = \frac{1}{K_A}$$

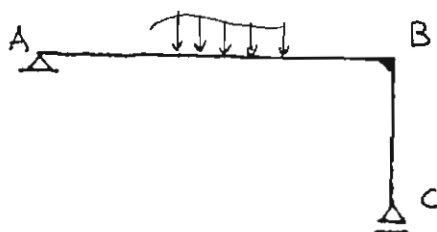
In modo analogo, per la molla in B si afferma che la rotazione mutua θ_B tra le facce della connessione è proporzionale al momento flettente agente in B, secondo la:

$$M_B = K_B \theta_B, \quad \text{o anche secondo la} \quad \theta_B = F_B M_B \quad \text{con} \quad F_B = \frac{1}{K_B}$$

Finalmente, per la molla in C si afferma che lo spostamento assiale w_C è legato alla reazione verticale in C, e quindi alla forza normale N_C , secondo la:

$$N_C = K_C w_C, \quad \text{o anche secondo la} \quad w_C = F_C N_C \quad \text{con} \quad F_C = \frac{1}{K_C}$$

L'applicazione del principio dei lavori virtuali non abbisogna di ritocchi sostanziali: è sufficiente mettere in conto, nel calcolo di $\delta L_f^{int.}$ i contributi dovuti alle molle. Si ricordi che, in pratica, per la determinazione delle caratteristiche di sollecitazione del sistema isostatico è lecito trascurare l'effetto della deformazione sulla sollecitazione anche per ciò attiene alla deformazione derivante dalle molle: e quindi è lecito valutare le caratteristiche di sollecit. come se le molle in A, B, C avessero rigidezza infinita. In altri termini



per il calcolo di N, T, M e di N_1, T_1, M_1 , al sistema effettivo si può sostituire il sistema rappresentato nella figura accanto.

Applichiamo ora il principio dei lavori virtuali.

Sistema spostamenti/deform.
(congruente) effettivo

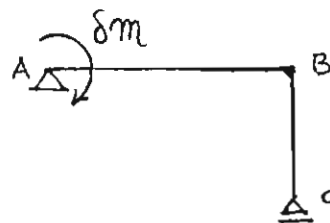
Nel sistema effettivo occorre considerare le deformazioni riguardanti l'elasticità della travatura:

$$\epsilon = \frac{N}{A} \quad \gamma = \frac{T}{GK} \quad \kappa = \frac{M}{EJ}$$

e le deformazioni riguardanti l'elasticità delle molle:

$$v_A = \frac{F T_A}{A A} \quad \theta_B = \frac{F M_B}{B B} \quad w_C = \frac{F N_C}{C C}$$

Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale.



Al solito le caratteristiche di sollecitazioni virtuali equilibrate con δM possono scriversi così:

$$\delta N = N_1 \delta M \quad \delta T = T_1 \delta M \quad \delta M = M_1 \delta M$$

Come si è detto, il lavoro virtuale interno deve comprendere anche, per ogni molla il lavoro compiuto dalla reazione virtuale per lo spostamento effettivo. Quindi si avrà:

$$\delta L_f^{int.} = \int_S (\epsilon \delta N + \gamma \delta T + \kappa \delta M) dz + v_A \delta T_A + \theta_B \delta M_B + u_C \delta N_C$$

(l'integrale è esteso a tutta la struttura). Allora il principio dei lavori virtuali dà:

$$\eta_A \delta M = \delta M \left\{ \int_S \left(\frac{N N_1}{EA} + \frac{T T_1}{GK} + \frac{M M_1}{EJ} \right) dz + F_A T_A T_{1A} + F_B M_B M_{1B} + F_C N_C N_{1C} \right\}$$

da cui:

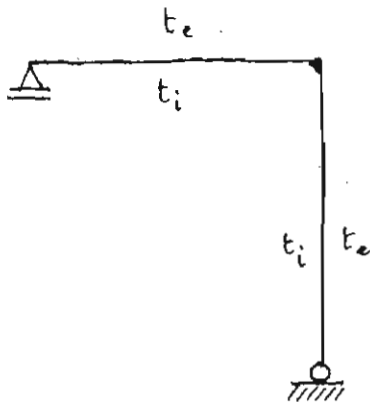
$$\eta_A = \int_S \left(\frac{N N_1}{EA} + \frac{T T_1}{GK} + \frac{M M_1}{EJ} \right) dz + F_A T_A T_{1A} + F_B M_B M_{1B} + F_C N_C N_{1C}$$

[5] Spostamenti dovuti a deformazioni termiche

Non è infrequente nelle strutture il caso di deformazioni dovute a sbalzi termici rispetto alle condizioni climatiche medie. Come è ben noto, gli effetti termici nelle strutture isostatiche consistono soltanto nello stato di deformazione che si può manifestare; invece, nelle strutture iperstatiche, le deformazioni possono essere cagione di sollecitazioni.

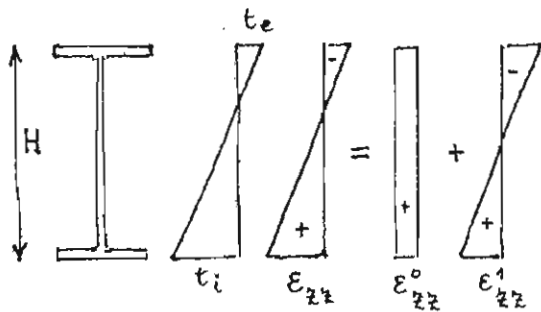
Si consideri dunque una struttura isostatica deformata termicamente.

Nella figura è rappresentato col solito tratteggio l'intradosso. Si supponga



che in corrispondenza dell'intradosso si verifichi una temperatura t_i , e all'estradosso una temperatura t_e . Nella misura di t_i e di t_e è bene riferirsi alla temperatura media dell'ambiente che ospita la struttura. Ad esempio, se la temperatura media dell'ambiente è 15°C e la temperatura all'intradosso è 50°C , si potrà $t_i = (50 - 15)^\circ\text{C} = 35^\circ\text{C}$. Analogamente per t_e .

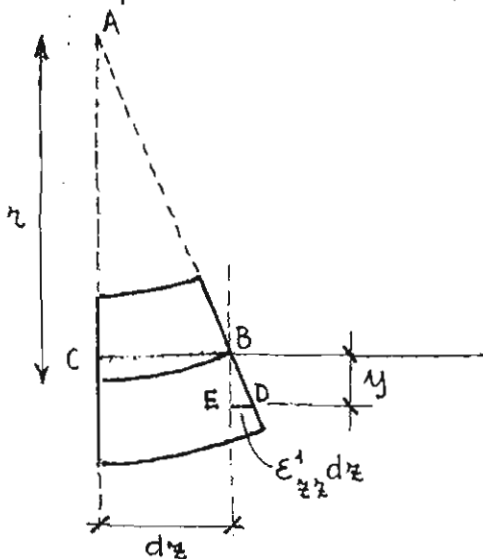
Lo sbalzo termico induce nella generica sezione trasversale della trave



una distribuzione della temperatura da t_e a t_i che spesso può ritenersi lineare, e ad essa corrisponde una deformazione ϵ_{zz} pure distribuita linearmente dall'estradosso all'intradosso, che si compone di due contributi, ϵ_{zz}^0 e ϵ_{zz}^1 ;

ϵ_{zz}^0 è uniforme lungo l'altezza della trave ed indica anche, come sappiamo, la dilatazione della linea d'asse, ossia la caratteristica di deformazione che in precedenza si è sempre indicata con ϵ ; ϵ_{zz}^1 è una distribuzione lineare avente valore nullo per $y=0$.

Indicando con $\epsilon_{zz}^1(y)$ il valore di ϵ_{zz}^1 alla quota y , dai triangoli simili ABC e BDE segue (vedi fig.):



$$dy \cdot \epsilon_{zz}^1(y) : y = dz : z$$

da cui:

$$\epsilon_{zz}^1(y) = \frac{y}{z}$$

e quindi

$$\kappa = \frac{1}{z} = \frac{\epsilon_{zz}^1(y)}{y} (= \text{cost.}) \quad (4.12)$$

Alla deformazione termica ϵ_{zz}^1 resta associata dunque l'altra caratteristica di deformazione, cioè κ . Si può invece dimostrare che lo sbalzo termico non induce la distorsione angolare γ .

Ora dobbiamo valutare ϵ_{zz}^0 ed ϵ_{zz}^1 in funzione delle temperature t_i, t_e . Naturalmente è solo la verifica sperimentale che può dare una indicazione pertinente.

Ebbene, valgono le seguenti formule:

$$E_{zz}^0 = \alpha t_0 \quad (4.13)$$

$$E_{zz}^1 = \alpha \frac{\Delta t}{H} y$$

dove α è una costante detta "coefficiente di dilatazione lineare termica";
 t_0 è la temperatura sulla linea d'asse; ad esempio, nel caso della sezione a I della figura precedente, risulta $t_0 = \frac{t_i + t_e}{2}$;
 Δt misura lo sbalzo termico tra l'intradosso e l'estradosso ed è data dalla formula $\Delta t = t_i - t_e$;
 H è l'altezza della sezione.

Per quanto riguarda il valore numerico di α (che dimensionalmente è l'inverso di una temperatura), esso dipende dal materiale di cui è costituita la struttura. Vedi la tabella seguente

Coefficienti di dilatazione lineare termica

(per valori della temperatura compresi tra 0°C e 100°C)

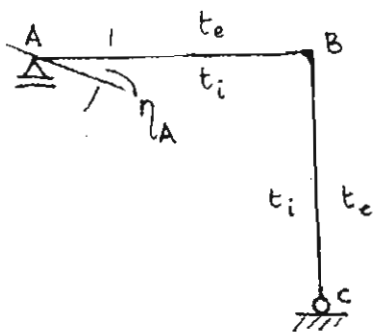
Acciaio, ferro	$\alpha = 0,000012$
Alluminio	$\alpha = 0,000024$
Bronzo, ottone	$\alpha = 0,000018$
Ghisa	$\alpha = 0,000010$
Legno (abete) // alle fibre	$\alpha = 0,000003$
⊥ " "	$\alpha = 0,000058$
Laterizi	$\alpha = 0,000006$

Dalle (4.13) segue, per la (4.12):

$$E = \alpha t_0 \quad (4.14)$$

$$\kappa = \alpha \frac{\Delta t}{H}$$

Riprendiamo l'esempio già considerato.



Si richiede la rotazione in A, η_A .
La soluzione può essere ottenuta in modo assai elementare applicando il principio dei lavori virtuali. Al solito, considereremo come sistema spostamenti/deformazioni congruente il sistema effettivo e come sistema forze/sollecitazioni

equilibrato virtuale quello in cui agisce in A una forza virtuale δM avente direzione (e verso) dello spostamento richiesto. Ossia:

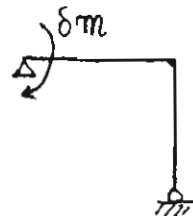
Sistema spostam./deform.
(congruente) effettivo

In questo sistema conosciamo le caratteristiche di deformazione:

$$\varepsilon = \alpha t_0, \quad \kappa = \alpha \frac{\Delta t}{H}$$

resta invece a priori incognito lo stato di spostamento; in particolare è incognita la rotazione η_A

Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale



In questo sistema le caratteristiche di sollecitazione equilibrate con δM possono scriversi al solito nella forma:

$$\delta N = N_1 \delta m, \quad \delta M = M_1 \delta m$$

Il principio dei lavori virtuali dà:

$$\eta_A \delta M = \int_S \left(\alpha t_0 N_1 + \alpha \frac{\Delta t}{H} M_1 \right) \delta m \, dz \quad (4.15)$$

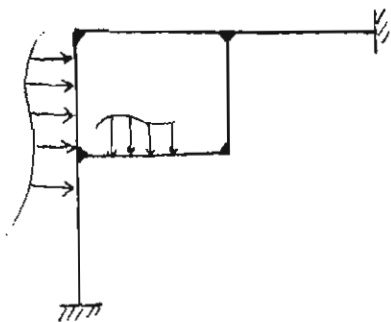
dove S indica che l'integrale va esteso a tutta la struttura deformata termicamente, cioè a tutte le parti della struttura su cui operano t_0 e Δt .

Dalla (4.15) deriva infine

$$\eta_A = \int_S \left(\alpha t_0 N_1 + \alpha \frac{\Delta t}{H} M_1 \right) dz \quad (4.16)$$

Soluzione di problemi iperstatici

L'applicazione del principio dei lavori virtuali alla soluzione dei problemi iperstatici, già illustrata con riferimento alle travi reticolari, non presenta, a questo punto, alcuna difficoltà concettuale. Si tratta di ripercorrere per l'ennesima volta il solito procedimento. Coerente dunque limitarci ad un solo, tipico esempio: una struttura n volte iperstatica.



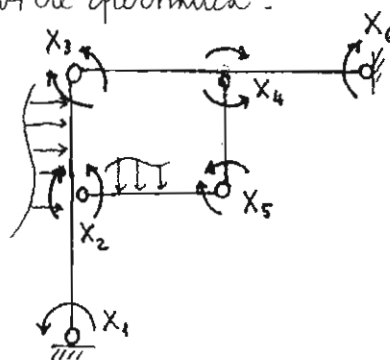
Sistema spostam./deform.
(congruente) effettivo

$$\epsilon = \frac{N}{EA} = \frac{N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k}{EA}$$

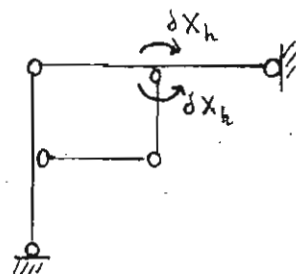
$$\gamma = \frac{T}{GK} = \frac{T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k}{GK}$$

$$\kappa = \frac{M}{EJ} = \frac{M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k}{EJ}$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$: spostamenti
assegnati (eventualmente: sposta-
menti relativi) dei punti di applica-
zione di X_1, X_2, \dots, X_n



Sistema forze/sollecitazioni
equilibrato virtuale



$$\delta N_h = N_h \delta X_h; \delta T_h = T_h \delta X_h; \delta M_h = M_h \delta X_h$$

Il principio dei lavori virtuali fornisce:

$$\eta_h \delta X_h = \int_S \left\{ \frac{N_0 + \sum_{k=1}^n N_k X_k}{EA} N_h \delta X_h + \frac{T_0 + \sum_{k=1}^n T_k X_k}{GK} T_h \delta X_h + \frac{M_0 + \sum_{k=1}^n M_k X_k}{EJ} M_h \delta X_h \right\} dz$$

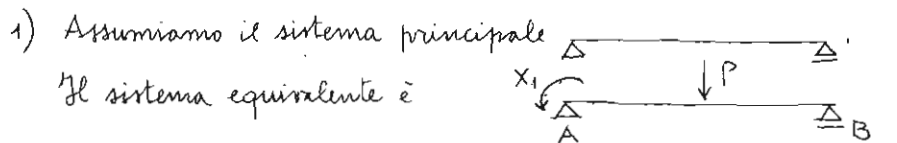
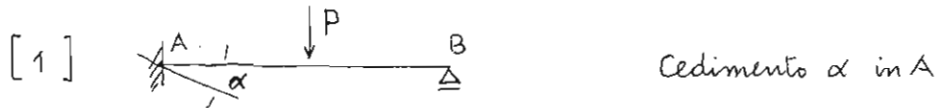
da cui:

$$\eta_h = \int_S \left(\frac{N_0 N_h}{EA} + \frac{T_0 T_h}{GK} + \frac{M_0 M_h}{EJ} \right) dz + \sum_{k=1}^n X_k \int_S \left(\frac{N_k N_h}{EA} + \frac{T_k T_h}{GK} + \frac{M_k M_h}{EJ} \right) dz;$$

si ritrovano così, ancora una volta, le note equazioni "di Müller-Breslau":

$$\eta_h = \eta_{h0} + \sum_{k=1}^n \eta_{hk} X_k$$

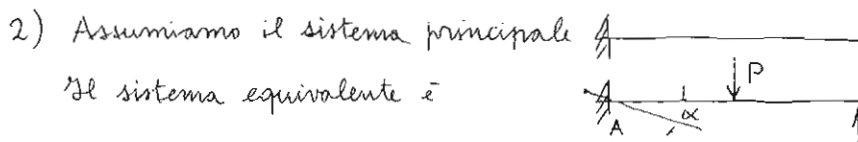
Alcuni esercizi



X_1 deve essere tale da rendere la rotazione in A pari ad α .

L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

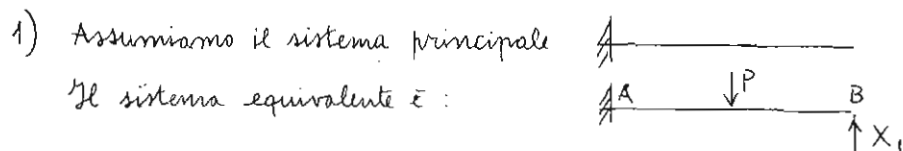
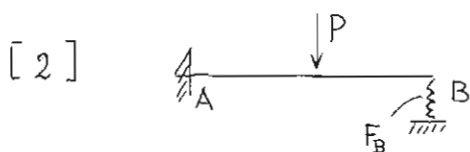
$$\eta_1 = -\alpha \quad \eta_{10} = -\frac{Pl^2}{16EJ} \quad \eta_{11} = \frac{l^2}{3EJ}$$



X_1 deve essere tale da rendere nullo lo spostamento verticale in B.

L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

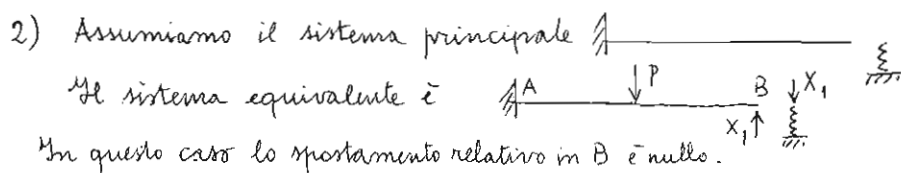
$$\eta_1 = 0 \quad \eta_{10} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ} - \alpha l \quad \eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$



Nel sistema equivalente B subisce lo spostamento $\eta_1 = -F_B X_1$.

L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

$$\eta_1 = -F_B X_1 \quad \eta_{10} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ} \quad \eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$

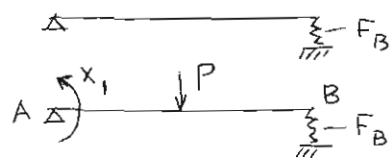


L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_{10} = -\frac{5}{48} \frac{Pl^3}{EJ} \quad \eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ} + F_B$$

3) Assumiamo il sistema principale

Il sistema equivalente è

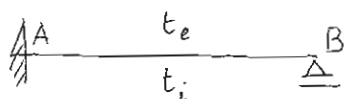


In questo caso, per il calcolo di η_{10} e di η_{11} ci possiamo riferire alla formula () di pag. .

L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

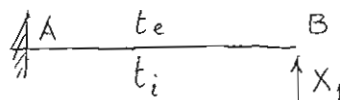
$$\eta_1 = 0 \quad \eta_{10} = -\frac{Pl^2}{16EJ} - \frac{F_B P}{2l} \quad \eta_{11} = \frac{l^2}{3EJ} + \frac{F_B}{l^2}$$

[3]



Assumiamo, ad es., il sistema principale

Il sistema equivalente è



X_1 deve essere tale da rendere nullo lo spostamento verticale in B.

L'equazione $\eta_1 = \eta_{10} + \eta_{11} X_1$ si specifica dunque così:

$$\eta_1 = 0 \quad \eta_{10} = \int_0^l \alpha \frac{\Delta t}{H} M_1 dz = \frac{\alpha \Delta t l^2}{2H} \quad \eta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}$$